

## §7. Электрон-фононные столкновения

Выше уже отмечалась важность подобных взаимодействий между электронами и колебаниями структурных частиц кристаллической решётки. Рассмотрим два случая таких процессов, которые графически представлены на рис.78, где прямыми линиями изображены движения электронов, волнистыми – фононов.

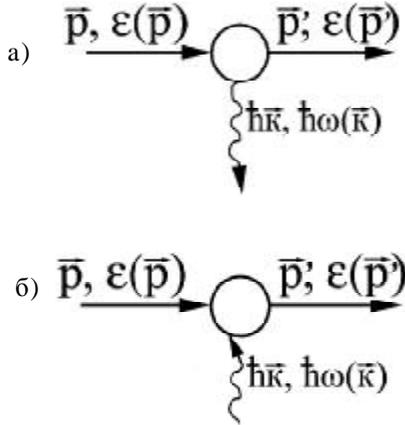


Рис.78.

На рис.78а) изображен процесс «рождения» фонона, на рис.78б) - процесс поглощения.

Установим, возможны ли данные процессы с точки зрения законов сохранения энергии и импульса. В обоих случаях можно составить следующее условие:

$$e(\mathbf{p}) + \hbar\omega = e(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}). \quad (4.7.1)$$

Так как почти у всех электронов  $e = e_\phi \gg \hbar\omega_{\max} = kT_D$ , то можно предыдущее равенство записать так:

$$e_\phi(\mathbf{p}) \approx e_\phi(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}). \quad (4.7.2)$$

Из соотношения (4.7.2) следует, что процесс может осуществиться, если поверхность Ферми  $e(\mathbf{p}) = e_\phi$  и ее «сдвинутый» на  $\hbar\mathbf{k}$  аналог  $e(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}) \approx e_\phi$  пересекаются (рис.79).

При  $\hbar k < 2p_\phi$  предыдущее условие выполняется – «рождение» и «гибель» фонона возможны.

Воспользуемся принципом соответствия и получим дополнительную информацию об условиях рассматриваемых процессов. Устремим  $\hbar \rightarrow 0$ , тогда из (4.7.2) следует:

$$\left(\frac{\partial e_\phi}{\partial k}\right) = 0.$$

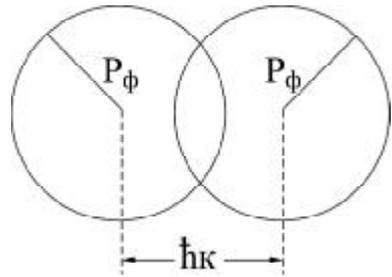


Рис.79.

Это означает что в процессе «рождения» («гибели») фононов принимают участие электроны, скорости которых перпендикулярны волновому вектору. Поскольку энергия Ферми не влияет на смысл полученного условия, то лучше не отбрасывать ма-  
 лую по сравнению с  $e_\phi$  величину  $\mathbf{h}\mathbf{w}$ . В результате получаем:

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{V_\phi} \wedge \mathbf{k}\right) = \mathbf{w} \text{ или } \cos \Theta = \frac{s}{V_\phi}, \angle \Theta = \left(\frac{\mathbf{r}}{V_\phi} \wedge \mathbf{k}\right), \text{ то есть } V_\phi > s, \text{ где } s - \text{ скорость фоно-}$$

нов (звуковых волн). Но это условие всегда выполняется, так как  $V_\phi \approx 10^8 \text{ см/с}$ , а  $s \approx 10^5 \text{ см/с}$ .

Образно можно сказать, что рождение (гибель) фонона – квантовый аналог черенковского излучения звука (напомним, что оптический черенковский эффект связан с излучением света).

Рассмотрим роль столкновений электронов между собой.

При уменьшении температуры  $T \rightarrow 0\text{K}$  длина свободного пробега в чистом кристалле  $l \rightarrow \infty$ , так как число фононов стремится к нулю. На первый взгляд кажется, что электроны перестают рассеиваться друг на друге. На самом деле все гораздо сложнее (и интереснее).

В действительности электроны сталкиваются, но результат столкновения не обнаруживается, так как все состояния с энергией меньше энергии Ферми заняты. Причем, какие электроны оказались в состояниях с энергиями  $< e_\phi$  неизвестно, так как электроны неразличимы в силу своей квантовой природы (фермионы!).

Итак, окончательно можно записать, что полное удельное сопротивление равно:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{прим}} + \mathbf{r}_{\text{фон}} + \mathbf{r}_{\text{эл}}.$$

В идеальном чистом проводнике удельное сопротивление должно стремиться к нулю при  $T \rightarrow 0\text{K}$ , а длина свободного пробега достигает «гигантской» величины - несколько миллиметров (для сравнения при  $T \sim 300\text{K}$ ,  $l \sim 10^{-6} \text{ см}$ !).

### §8. Металлы с большой длиной пробега электронов

Выше мы установили, что при высокой температуре основной вклад во взаимодействие с электронами вносят фононы. При  $T \rightarrow 0\text{K}$  это взаимодействие также стремится к нулю. И длина свободного пробега  $l$  определяется как дефектностью решетки (без учета вклада фононов), так и электрон-электронными столкновениями. Наличие дефектов создает так называемое остаточное сопротивление, которое можно уменьшить, очищая кристалл от примесей. Так что в идеальном кристалле при  $T \rightarrow 0\text{K}$  длина свободного пробега  $l$  определяется исключительно электрон-электронными столкновениями (см. гл.2, §13, формулы (2.13.7) - (2.13.9)), которые сопровождаются процессами переброса. Советскими физиками Л. Ландау и Я. Померанчуком получена формула

$$\frac{1}{\mathbf{l}_{\text{э}}} \approx \frac{p_{\phi}}{\mathbf{h}} \left( \frac{e^2}{\mathbf{h}V_{\phi}} \right)^2 \left( \frac{\kappa T}{e_{\phi}} \right)^2, \quad (4.8.1)$$

из которой следует, что при  $T \rightarrow 0\text{K}$  длина свободного пробега электронов  $\mathbf{l}_{\text{эл}} \rightarrow \infty$ .

Так как  $\mathbf{r} \sim \frac{1}{\mathbf{l}}$ , то следовательно,  $\mathbf{r}_{\text{эл}} \sim T^2$ .

Итак, при высоких температурах основной вклад в возникновение сопротивления металлов вносит рассеяние электронов на тепловых колебаниях решётки (на фононах). Электроны практически подчиняются классической статистике, и закон Фидемана-Франца выполняется хорошо.

При низких температурах  $T \ll T_d$  вклад в возникновение сопротивления вносят все его причины:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{прим}} + \mathbf{r}_{\text{фон}} + \mathbf{r}_{\text{эл}}. \quad (4.8.2)$$

Первое слагаемое не зависит от температуры, второе  $\sim \Phi^5$ , третье  $\sim \Phi^2$ . Следовательно, истинные свойства металлов можно определить, изучая идеальную решетку и при низких температурах:

$$\mathbf{r}_{\text{ид}} = \mathbf{r}_{\phi} + \mathbf{r}_{\text{э}}.$$

Сейчас создаются настолько чистые металлы, что длина свободного пробега электронов перестает быть микроскопическим параметром. Вблизи  $\Phi \approx 0\text{K}$  она достигает нескольких миллиметров. Это гигантское расстояние для микромира. В этом случае говорят о металлах с большой длиной пробега электронов.

## §9. Аномальный скин-эффект

Скин-эффект – это поверхностное распределение переменного тока и электромагнитного поля в проводнике. Скин-эффект проявляется и в плазме, и в ионосфере, на поверхности моря и в других средах, обладающих заметной проводимостью. Толщина ~~СКИН-СЛОЯ~~  $d$  зависит от частоты тока и свойств проводника. В зависимости от соотношения между  $d$  и длиной свободного пробега  $l$  электронов различают нормальный  $l \ll d$  и аномальный  $l \gg d$  скин-эффект.

В области ультрафиолетовых частот  $d$  быстро растет, металл оказывается прозрачным и скин-эффект исчезает. В достаточно чистых металлах (см. предыдущий параграф §8) длина свободного пробега  $l$  определяется взаимодействием электронов с фононами и зависит от  $T^5$ , благодаря чему при низких температурах существует область частот (сантиметровой и инфракрасной части спектра), в которой  $l \gg d$ , что соответствует определению аномального скин-эффекта. Границей обоих эффектов в этом случае служит температура  $T \gg 100\text{K}$ , при которой  $l = 1$  см.

Изучение скин-эффекта позволяет получить широкую информацию об электронных свойствах проводника, так как является структурно-чувствительным свойством (см. Прил.14).

На границе металла происходит разделение электромагнитной волны на проходящую внутрь и поглощаемую в нем и на отраженную, большую часть, которая и дает блеск поверхности металла. Вторая часть электромагнитной волны связана с возникающим в поверхностном слое сопротивлении - поверхностном сопротивлении-импедансом.

Если электроны движутся под большими углами к поверхности металла, то лишь небольшую часть своего свободного пробега они будут находится под воздействием электромагнитной волны, их вклад в отражении волны незначителен. Те же электроны, которые движутся параллельно поверхности, подвергаются воздействию со стороны электромагнитной волны. Это особенно действенно в случае аномального скин-эффекта, когда  $l \gg d$ .

## § 10. Циклотронный резонанс (Азбель-Канер-эффект)

Как отмечалось выше, при низкой температуре глубина проникновения радиоволны в металл столь мала, что большую часть своего свободного пробега электроны проводят вне действия электромагнитного поля (аномальный скин-эффект). Но электроны можно вернуть в скин-слой при помощи магнитного поля, параллельного поверхности металла. Тогда электроны будут двигаться вокруг направления магнитного поля, периодически приближаясь к поверхности металла.

Чтобы обнаружить это движение, надо так подобрать частоту электромагнитной волны  $\omega$ , чтобы каждый раз, когда электрон пролетает через скин-слой, его встречало поле в одной и той же фазе. При этом электроны будут оптимально взаимодействовать с волной, что отразится на величине поверхностного сопротивления, т.е. на коэффициенте отражения.

Итак,

$$\omega = q \frac{eH}{m_{\phi,extr}^* \cdot c},$$

$$\text{где } m^* = \frac{1}{2p} \frac{dS(\mathbf{e}, p_z)}{\partial \mathbf{e}}; q = 1, 2, 3, \dots$$

Все предыдущие рассуждения применимы и для полупроводников.

Рассмотренное явление получило название диамагнитного резонанса. Оно служит методом исследования структуры электронных и дырочных зон в полупроводниках.

В металлах явление усложняется аномальным скин-эффектом, резонанс может наступать и при кратных частотах волны. В металлах рассмотренное явление называется циклотронным резонансом, или Азбель-Канер-эффектом.

В экспериментах обычно частоту не меняют, а изменяют величину магнитного поля  $H$ . При резонансе резко убывает поверхностное сопротивление. Используя пре-

дыщую формулу, определяют  $m^*$ . Так как  $m^*$  выражается через производную от сечения поверхности Ферми по энергии, то ясно, что  $m^*$  характеризует не только саму Ферми-поверхность, но и распределение скоростей электронов на ней.

## §11. Размерные эффекты

Размерными эффектами называют методы, в которых определяют диаметры поверхности Ферми путем сравнения их с фиксированной длиной  $L$  согласно формуле

$$\frac{cD_{extr}^{\phi}}{eH} = L, \quad (4.11.1)$$

где  $L$  – некоторая фиксированная длина.

Известно, что сопротивление металлической пластины (и статическое, и высокочастотное) в магнитном поле существенно зависит от соотношения между размерами траектории электронов и толщиной пластины. Если поместить пластину в магнитное поле, параллельное границе образца, то некоторые электроны будут двигаться по своим сложным спиральям, вовсе не замечая границ, а другие, пройдя меньше одного витка, обязательно столкнутся со стенкой пластины изнутри. В силу однородного распределения электронов внутри образца, ось движения можно выбрать произвольно, так как всегда найдутся электроны с данной осью движения.

Размеры траектории тоже произвольны, так как в зависимости от проекции импульса электрона на магнитное поле  $p_z$ , сечения поверхности Ферми существенно различны. А так как именно сечения определяют размеры траектории в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, то разным  $p_z$  соответствуют разные траектории.

Однако, не все электроны, не все сечения поверхности Ферми равноценны. Суммируя вклад различных электронов в проводимость, нужно учесть разные  $p_z$ , то есть учесть различные сечения поверхности Ферми, электроны с различными траекториями.

Пусть вклад от электронов из интервала  $Dp_z$  равен  $C \cdot D p_z$ . Будем нумеровать электроны не по величине  $p_z$ , а по непосредственно интересующей нас величине  $D^{\phi}$  – по диаметру поверхности Ферми. Тогда вклад электронов с данным значением  $D^{\phi}$  можно записать так:

$$C \cdot \Delta D^{\phi} \frac{dp_z^{\phi}}{dD_z^{\phi}}.$$

Отсюда видно, что наибольший вклад в электрический ток дают те электроны, которым соответствуют экстремальные (*max* или *min*) диаметры Ферми-поверхности,

так как для них 
$$\frac{dD^{\phi}}{dp_z} = 0.$$

Этими рассуждениями мы несколько ликвидировали ту неоднозначность, которая была в формуле (4.11.1): нужно рассматривать только те траектории, у которых экстремальные диаметры – эффективные диаметры.

Уменьшая  $H$ , можно обнаружить момент, когда проявится зависимость  $r(H)$ : в этот момент ни одна эффективная траектория не поместится в образце. Обозначим эту

напряженность магнитного поля через  $H_{кр}$ . Тогда соотношение  $\frac{cD_{extr}^{\phi}}{eH_{кр}} = L$ ,

позволяет непосредственно измерить  $D_{extr}^{\phi} : D_{extr}^{\phi} = \frac{eH_{кр}}{c} \cdot L$ , где  $L$  – толщина пластины.

Теория и опыт показывают, что  $r(H)$  проявляет периодичность, когда в толщине пластины размещается целое число орбит. Очевидно, что  $H_{кр}$  равна:

$$H_{кр} = \frac{cD_{extr}^{\phi}}{eL}. \quad (4.11.2)$$

Для «прощупывания» поверхности Ферми надо менять направление  $\hat{H}$  и вырашивать монокристаллы по разному ориентированными осями.

Другим примером «работы» размерного эффекта является поглощение звука металлом в магнитном поле (в сверхпроводнике поглощение резко падает в момент фазового перехода). При прохождении звуковой волны через кристалл ионы решетки сдвигаются, электроны же несколько отстают, возникает электрическое поле, действующее на электроны. Это поле колеблется со звуковой частотой и имеет ту же длину

волны, что и звук. Так как скорость электронов  $V^{\phi} \gg V_{звук}$ , то поле квазистатично. Электроны пролетают это поле. Возможны два случая:

$$1. I_{зв} \gg I_{эл},$$

$$2. I_{зв} \ll I_{эл}.$$

Для ультразвука  $u_{уз} \approx 10^8 \text{ c}^{-1}$ ,  $V_{уз} \sim 10^5 \text{ см} \cdot \text{c}^{-1}$ , тогда

$$I_{уз} \sim 10^{-3} \text{ см}.$$

Поэтому условие  $I \gg I$  не очень жесткое и при  $T \sim 4,2K$  в чистых металлах ( $l \sim 1\text{см}$ ) выполняется. В этом случае большая часть электронов не взаимодействует со звуком, вернее, электроны будут то ускоряться, то замедляться, при этом средний эффект равен нулю.

С другой стороны, эффективно будут взаимодействовать те электроны, которые летят перпендикулярно направлению распространения волны, то есть

$(\frac{\mathbf{r}}{l} \nabla \phi) = 0$ . Их коэффициент поглощения звука пропорционален частоте  $\omega$ , не зависит от длины свободного пробега  $l$  и определяется только свойствами электронов. Мы снова получаем возможность изучать энергетический спектр электронов.

Если поместить кристалл в сильное магнитное поле, то возникает магнито-акустический резонанс.

Магнито-акустический резонанс проявляется в зависимости коэффициента поглощения звука от

$$\frac{1}{H} (\text{при } I \gg I_{36}).$$

Магнитное поле направлено перпендикулярно распространению звуковой волны (рис.80).

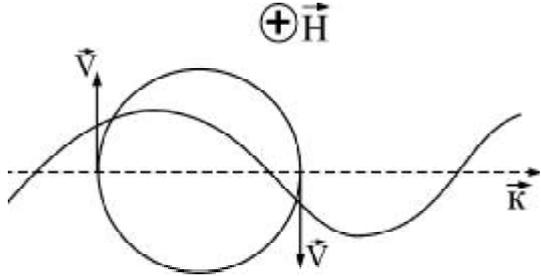


Рис.80.

При каждом обороте  $\frac{1}{H}$  электрон подгоняется (либо тормозится) звуковой волной.

Когда  $\frac{1}{H}$  изменяется на величину  $\Delta \frac{1}{H} = \frac{eI}{cD_{ext}}$ , это приводит к повторению

состояния электрона. Поэтому коэффициент поглощения звука будет зависеть от  $\frac{1}{H}$ .

Магнито-акустический резонанс – это явление имеет классическую природу. Однако, электроны поглощают не любые фононы. В этом случае резко зависит коэффициент поглощения звука от величины магнитного поля.  $H$  называют гигантскими квантовыми осцилляциями (они, в отличие от магнито-акустического резонанса, имеют квантовую природу).

## §12. Проникновение электромагнитных волн в металл. Геликоны

Газообразная плазма наполняет собой весь мир, но изучать ее свойства в лаборатории достаточно сложно. Электроны и положительно заряженные ионы в твердом теле образуют так называемую твердотельную плазму. Изучать ее свойства значительно проще, на ней можно проверять общие теоретические предсказания. Ведь именно изучение газообразной плазмы привело к открытию электрона.

Когда на плазму действуют электрическое и магнитное поля, движение частиц в ней не беспорядочно. Так, если плазма находится в магнитном поле, в ней могут существовать определенные виды волн, которые являются электромагнитными, они обладают уникальными и любопытными свойствами. (Приложение 15).

Движение электрона в плазме может быть подвержено влиянию четырех сил:

- 1)  $\vec{E}$  электромагнитной волны или внешнего поля;
- 2) замедление из-за столкновений;
- 3) сила Лоренца (если есть  $\vec{H}$ );
- 4) инерционная,  $\sim m$  и  $a$  и направленная противоположно  $\vec{a}$ .

В некоторых полупроводниках и металлах (при  $T \sim OK$ ) сила трения может быть очень малой.

Если силой трения можно пренебречь, то электрическая сила будет уравновешена суммой сил Лоренца и инерционной силой, наибольший вклад в сумму дает сила Лоренца.

Оказывается, что единственной волной, которая может сообщить электрону необходимое движение, и, следовательно, распространяться, является волна, у которой электрическое поле и связанное с ним направление тока, вращаются относительно магнитного поля с определенной частотой.

Закон дисперсии имеет вид:

$$\omega = \frac{pcH \cos \Theta}{e(n_1 - n_2) \lambda^2}, \quad (4.12.1)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – концентрации носителей заряда,  $\angle \Theta = \left( k \vec{e} \vec{H} \right)$ .

Все множители ( $H, e, n$ ) определяют силу Лоренца. Поэтому неудивительно, что волна будет распространяться только в том случае, если направление вращения вектора электрического поля в ней совпадает с вращением электронов, движущихся в магнитном поле.

Эта низкочастотная электромагнитная волна получила название **геликон**.

То обстоятельство, что частота геликона  $\sim \frac{1}{L^2}$ , наделяет волну необычным свойством: ее скорость возрастает вместе с увеличением частоты. Обычно  $ln = c = const$ . В случае же геликона при увеличении частоты длина волны  $l$  уменьшается, но только как квадратный корень из частоты. Например, если частота увеличивается в 100 раз, длина волны падает только в 10 раз, а, следовательно, скорость возрастает в 10 раз.

Детектор (см. рис.81) показывает пик напряжения при определенных частотах, когда система резонирует. Это происходит тогда, когда в длине образца в направлении  $\vec{H}$  укладывается целое число полуволн геликона.

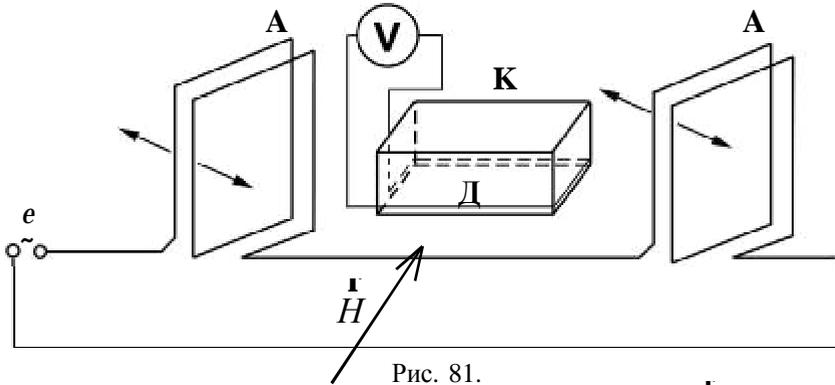


Рис. 81.

А - управляющие обмотки, К - кристалл, Д - обмотки детектора,  $\vec{H}$  - постоянное магнитное поле, e - высокочастотный генератор.

Геликоны были открыты дважды: в 1960 г. французским физиком Пьером Агрейном с сотрудниками и в 1961 г. Р.Бауэрсом. Первый работал с полупроводниками при частоте  $\nu=10^{10}$  МГц., второй – с металлом при  $\nu=10-100$  Гц.

Табл. 6.

Параметры \ Среда	Ионосфера	Полупроводник	Металл
Концентрация см <sup>-3</sup>	10 <sup>3</sup> -10 <sup>5</sup>	10 <sup>14</sup> -10 <sup>16</sup>	10 <sup>22</sup>
Магнитное поле Гс	0,2	10 <sup>4</sup>	10 <sup>4</sup>
Частота Гц	5000	10 <sup>10</sup>	1-10 <sup>4</sup>
Длина волны см	400000	0,3	0,5
Скорость см/с	2·10 <sup>9</sup>	3·10 <sup>9</sup>	20

### §13. Электрон проводимости в магнитном поле

Важной задачей физики твердого тела является исследование энергетического спектра электронов проводимости в металле. Ниже мы рассмотрим эту задачу, исследуя воздействие на электрон внешнего магнитного поля.

Пусть металл помещен в магнитное поле индукции  $\vec{B}$ , на его электроны действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = e[\vec{v}\vec{B}]. \quad (4.13.1)$$

Несмотря на внешнее совпадение формулы (4.13.1) для электрона проводимости с формулой силы Лоренца свободного электрона, имеется принципиальное отличие.

Дело в том, что для электрона проводимости неверна формула классической

механики 
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{m}.$$

Согласно методу эффективной массы (см. гл.4, §3) связь между  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{p}$  имеет принципиально другой характер:

$$V = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_k}{dk} \text{ и } p = \hbar k.$$

У верха зоны  $\frac{dE_k}{dk} = 0$ , поэтому и  $V = 0$ , в то время как импульс у верха зоны

достигает максимума: при  $k = \frac{p}{a}$  импульс  $p = \frac{p\hbar}{a}$ . Все это существенным обра-

зом сказывается на всей динамике электрона проводимости, в частности, на характер его движения в магнитном поле.

Обратим внимание, что энергия электрона и проекция импульса на направление поля  $p_z$  не изменяются при движении в магнитном поле. Если есть составляющие импульса (скорости) перпендикулярная и параллельная полю, то первая составляющая приведет к вращению электрона вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$ , а вторая составляющая – не влияет на его поступательное движение. В результате – электрон будет двигаться по винтовой траектории. Радиус спирали можно найти из равенства

$$\frac{m^* V_{\perp}^2}{r_B} = e V_{\perp} B,$$

откуда 
$$r_B = \frac{p_{\perp}}{eB} = \frac{m^* V_{\perp}}{eB}, \quad (4.13.2)$$

где  $m^*$ - эффективная масса.

Определим период обращения электрона:

$$T = \frac{2\pi r_B}{V_{\perp}} = \frac{2\pi m^*}{eB}, \text{ где } m^* = m_{\text{эф}} = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 E_k}{dk^2}} \text{ и } w = 2\pi n = \frac{2p}{T} = \frac{eB}{m^*}. \quad (4.13.3)$$

Как показывается в квантовой механике (см. гл.2, §10), у частицы, совершающей периодическое движение (так называемый «квантовый осциллятор»), могут существовать лишь дискретные значения энергии. Поэтому у заряженных частиц в магнитном поле появляются уровни энергии, называемые уровнями Ландау (1930 г.):

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (4.13.4)$$

где  $n=0,1,2 \dots$ .

Особенности движения электрона в магнитном поле проявятся только в том случае, если между двумя столкновениями электрон успеет пройти значительную часть траектории, то есть должно выполняться условие

$$r_B \leq l, \quad (4.13.5)$$

где  $r_B$  - радиус орбиты электрона в магнитном поле,  $l$  - длина свободного пробега.

В простейшем случае, когда Ферми-поверхность – сфера, из формулы (4.3.2) следует:

$$r_B = \frac{P_\Phi}{eB},$$

где  $P_\Phi$  - радиус Ферми-сферы в пространстве импульсов.

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга  $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$  следует, что

$$P_\Phi \approx \frac{\hbar}{a},$$

где  $a$  - межатомное расстояние в кристалле.

Следовательно, при комнатной температуре  $l \ll r_B$  вплоть до гигантских магнитных полей порядка  $10^4$  Тл. Однако при понижении температуры  $l$  резко возрастает и можно использовать достижимые поля (0.1 – 1 Тл при  $T \leq 4,2\text{К}$ ).

Если учесть, что разным направлениям спина, то есть разным значениям спинового квантового числа  $s = \pm \frac{1}{2}$  в магнитном поле соответствуют разные энергии, то вместо формулы (4.13.4) следует применять выражение:

$$E_n = E_0 + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + sg m_B B,$$

где  $n=0,1,2 \dots$ ,  $\hbar \omega = \frac{\hbar e B}{m^*}$  - циклотронная энергия,  $g$  – фактор Ланде,  $m_B$  - магнетон Бора.

Таким образом, мы получаем набор дискретных уровней для электронов. В отличие от энергетических зон, возникающих из-за квантования в электрическом поле,

число мест  $N_B$  на каждом из уровней Ландау ограничено и равно  $eB/h$ . Смысл этого выражения установим так. Радиусы орбит электронов  $i$ -го уровня можно определить из формулы для уровней Ландау, если учесть, что

$$F_{ц.с.} = m^* \omega_f^2 r_B^2 = \frac{m^* V^2}{r_B},$$

откуда  $m^* V^2 = m^* \omega_f^2 r_B^2$  и тогда  $r_B^2 = \frac{m^* V^2}{m^* \omega_f^2}$ .

$$\text{Но } \frac{m^* V^2}{2} = E_n.$$

$$\text{Тогда } 2E_n = 2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

$$\text{и } r_B^2 = \frac{2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega}{m^* \omega_f^2} = \frac{2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar}{eB}.$$

Соотношение неопределенностей запрещает существование точных значений координаты, так что эти окружности размыты, а электроны движутся где-то вблизи них. Рассмотрим орбиты для электронов с  $n=0$  и  $n=1$ . Граница между этими состояниями проходит примерно посередине между окружностями. Электрон с  $n=0$  «заперт» на

участке с площадью  $\pi r_B^2 = \frac{\hbar}{eB}$ . Другие электроны здесь уже разместиться не могут,

не позволяет принцип Паули. Поэтому на  $1\text{ м}^2$  можно разместить  $N_B = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{eB}{h}$

электронов в состоянии  $n=0$ .

Таким образом, мы установили смысл величины  $\frac{eB}{h}$ .

## §14. Квантовый эффект Холла

В течение 100 лет с 1879 г. по 1980 г. считалось, что природа открытого американским ученым Е.Холлом явления, названного в честь этого ученого эффектом Холла, познана, и величина сопротивления Холла установлена (см. гл.3, §15):

$$R_H = \frac{A}{ne} = \frac{Dj}{BI}. \quad (4.14.1)$$

Однако в 1980 г. немецкий физик Клаус фон Клитцинг установил новое в эффекте Холла: холловское сопротивление квантуется, если эффект наблюдать в двумерном электронном газе.

В действительности двумерный электронный газ не является двумерным в полном смысле этого слова. Он двумерен в том смысле, что движение вдоль одного из направлений запрещено (ось  $Oz$ ), вдоль других координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  электроны движутся как свободные частицы (см. рис. 82).

Обычно двумерный электронный газ создают, прижимая электроны в металле к границе с диэлектриком с помощью электрического поля. Электроны не могут отойти от диэлектрика – мешает электрическое поле, они не могут и войти в диэлектрик. Схема рис.82 называется МОП: металл-окисел-полупроводник.

Из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга  $\Delta x \cdot \Delta p_x = h$

слой электронов размазан в некоторой толщине  $\Delta x$ . В возникшей потенциальной яме согласно законам квантовой механики возникают дискретные состояния – уровни Ландау. Кроме того, у электронов есть кинетическая энергия вдоль границы, которая из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга не может равняться нулю

$$\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}; \Delta p \neq 0.$$

При исследовании двумерных электронных слоев в полупроводниках измеряют их сопротивление электрическому току, изменяя условия наблюдения. Электрическая схема напоминает устройство полевого транзистора. (Рис.83, см. гл.3, §12). Изменяя напряжение на затворе, можно изменить концентрацию электронов в двумерном слое, что приведет к изменению сопротивления между истоком и стоком.

Напомним кратко суть обычного, классического эффекта Холла (см. гл.3, §15). Пусть через двумерный электронный газ (рис.83) течет ток  $I$  в направлении оси  $Ox$ . Средняя скорость направленного движения электронов равна

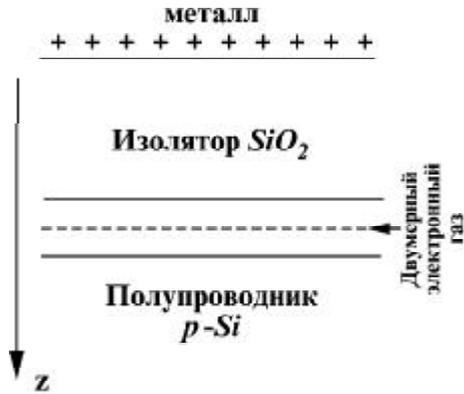


Рис.82.

$$\bar{V} = \frac{I}{Nea},$$

где  $a$  – ширина канала.

Если на электрон будет действовать поперечное их скорости магнитное поле, то возникнет дополнительная сила – сила Лоренца:

$$F = e\bar{V}B.$$

Под действием этой силы, направленной перпендикулярно скорости движения электронов  $\bar{V}$ , начнется перемещение электронов вдоль оси  $Oy$ . В результате накопления электронов на стороне канала возникает новое электрическое поле – холловское поле  $E_H$ , которое будет препятствовать дальнейшему смещению электронов вдоль оси  $Oy$ . Это холловское поле характеризуется

разностью потенциалов  $\Delta j_H$ :

$$E_H = \frac{F}{e} = \frac{e\bar{V}B}{e} = \bar{V}B = \frac{IB}{Nea} = \frac{\Delta j_H}{a},$$

откуда 
$$\Delta j_H = \frac{IB}{Ne}. \quad (4.14.2)$$

Для количественного описания эффекта Холла вводится символическая величина – холловское сопротивление, которая определяется как отношение холловского напряжения (направленного вдоль оси  $Oy$ ) к величине тока, текущего вдоль оси  $Ox$ :

$$R_H = \frac{\Delta j_H}{I} = \frac{IB}{INe} = \frac{B}{Ne}.$$

Если воспользоваться формулой  $R = r \frac{l}{s}$ , и допустить, что длина канала  $l=1$

ед. длины и  $s=1$  ед. площади, то получится, что

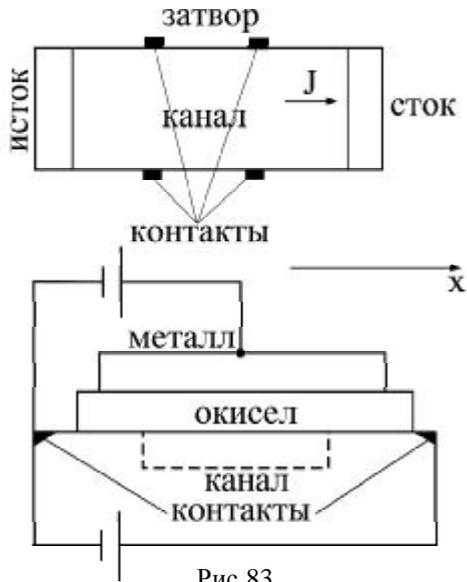


Рис.83.

$$R_H \equiv r_{xy}. \quad (4.14.3)$$

Двойной индекс у  $r$  свидетельствует о том, что величина  $R_H$  связана с характеристиками, имеющими отношение к разным направлениям  $Ox$  и  $Oy$ .

В течение 100 лет с момента открытия эффекта Холла в 1879 г. и до 1980 г. формула

$R_H = \frac{B}{Ne}$  не вызвала сомнений. Исследования показали зависимость эффекта Холла от эффективной массы носителей заряда, обнаружен аномальный эффект, обусловленный носителями противоположного знака, чем у электронов, влияние столкновений носителей заряда и т.д. Эффект Холла считался классическим.

Однако в 1980 г. группа исследователей во главе с Клаусом фон Клитцингом (в 1985 г. Клаусу фон Клитцингу присуждается Нобелевская премия по физике) обнаруживает, что в двумерном электронном слое зависимость  $R_H$  от  $B$  и  $N$  перестает быть аналитически простой. Существуют некоторые особые значения  $R_H$ , которые не изменяются при изменении  $N$  или  $B$ . При этом, и это очень важно, значения  $R_H$  представляются через комбинацию фундаментальных физических постоянных.

Действительно, подставим в формулу  $R_H$  (4.14.3) поверхностную концентрацию

электронов  $N = iN_B = \frac{ieB}{h}$ :

$$R_H = \frac{B}{Ne} = \frac{B \cdot h}{ieBe} = \frac{h}{ie^2}, \quad (4.14.4)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $e$  – заряд электрона,  $i$  – целое число.

Так было открыто новое макроскопически наблюдаемое квантовое явление.

Ниже мы рассмотрим использование формулы (4.14.4) в метрологии.

Чтобы понять смысл выражения (4.14.4), выясним, откуда вообще возникает сопротивление току в проводнике. Как известно, при своем движении электроны взаимодействуют как с узлами кристаллической решетки, с примесями, с фононами, а также взаимодействуют между собой. В результате происходит обмен энергией и количеством движения, изменяется направление движения электрона. Все это и обуславливает то, что мы называем сопротивлением.

Если на уровне Ландау (мы рассматриваем двумерный электронный газ, для которого справедлива формула (4.14.4)) есть свободные места, то рассеяние электронов возможно в пределах одного энергетического уровня без существенного изменения энергии электрона. Если же уровень Ландау заполнен полностью, то изменение состояния носителя заряда возможно при переходе его на незаполненный (свободный) уровень Ландау. Однако, при достаточно низких температурах вероятность такого перехода

мала, так как она пропорциональна множителю  $\exp\left(-\frac{\Delta e}{2kT}\right)$ , где  $De$  – расстояние

(по энергии) между рассматриваемыми уровнями Ландау. Поэтому при понижении температуры уменьшается и сопротивление току. При  $T=OK$ , если заполнено целое число уровней Ландау, сопротивление (в том числе и удельное) в направлении оси  $Ox$  должно

быть равно нулю:  $r_{xx} = 0$ . Это означает, что ток течет вдоль линий постоянного потенциала – вдоль так называемых эквипотенциалей.

Следовательно, в широком интервале изменения концентраций носителей заряда **ДАТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ХОЛЛОВСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ**  $R_H$  остается постоянным.

Учтем неидеальность двумерного слоя, выясним, к какому эффекту это может привести. Мы считали, что электрическое поле, прижимающее электроны в двумерном слое к диэлектрику, однородным. Но в реальных случаях это поле в действительности всегда оказывается неоднородным по нескольким причинам:

- 1) неоднородна толщина слоя окисла в МОП – структуре;
- 2) неоднородно распределение положительного заряда в структуре;
- 3) наличие заряженных ионов на границе раздела и т.д.

В результате этих причин энергия электрона в одних точках двумерного слоя оказывается больше, в других – меньше. На рис. 84 представлена «пространственная» картина энергии электрона. Она имеет вид не плоскости (как в идеальном случае), а «холмистой» местности с «горами» и «ямами».

Если  $r_{xx} = 0$ , то ток может течь вдоль эквипотенциалей. Ток через слой течет между истоком и стоком. Следовательно, он может течь лишь по эквипотенциалам, соединяющим исток и сток. Но таких эквипотенциалей, нам видно из рис.84, очень немного. Основная масса эквипотенциалей замыкается внутри слоя, охватывая «горы» и «яммы». Поэтому электроны, находящиеся в «ямах» или на «горах», не могут переносить ток – они не могут покинуть своих «ям» и своих «гор». Итак, все электроны разделяются на два вида: электроны, переносящие ток, эти электроны находятся на эквипотенциальных «дорожках» с потенциалами, близкими к среднему значению потенциала слоя, и на локализованные электроны.

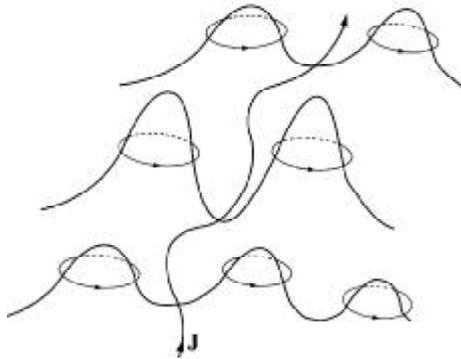


Рис.84.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда уровни Ландау до  $(i - 1)$ -го включительно заполнены полностью, а следующие пусты. Добавим в слой некоторое количество электронов (или немного уменьшим магнитное поле, что и приведет к уменьшению числа мест на уровнях Ландау). Излишек электронов располагается на  $i$ -м уровне, причем электроны займут состояния в «ямах», так как там их энергия будет наименьшей. Следовательно, и концентрация изменится лишь в «ямах» потенциального рельефа, где ток не течет. Это, конечно же, не изменит ни  $r_{xx}$ , ни  $r_{xy}$  на дорожках, по которым течет ток.

Это будет продолжаться до тех пор, пока все места в «ямах» не окажутся занятыми, и не начнет изменяться концентрация на токовых дорожках. Пока остается хотя бы одна дорожка, на которой концентрация точно равна  $iN_B$ , весь ток будет течь по ней, так как ее сопротивление равно нулю и, следовательно, холловское напряжение меняться не будет. Но когда концентрация изменится, и холловское сопротивление перестанет сохранять свое квантовое значение,  $r_{xx}$  станет отлично от нуля. Если число электронов будет увеличиваться далее, то рано или поздно на одной из токовых дорожек концентрация электронов станет равна  $(i+1)N_B$ . Сопротивление этих дорожек станет

равным нулю, весь ток потечет по ней, а холловское сопротивление примет следующее квантованное значение, которое будет оставаться неизменным при увеличении концентрации электронов на других «дорожках» и «горах».

Так можно объяснить наблюдаемый в двумерной электронной системе эффект квантования холловского сопротивления и возникновение плато квантового холловского сопротивления.

Однако, не все так просто на самом деле. В квантованном эффекте Холла еще много проблем. До сих пор не существует теории, которая смогла бы предсказать поправки к величине квантованного холловского сопротивления, связанные, например, с влиянием величины тока, текущего через образец, качеством образца или какими-либо другими факторами.

*О сопротивлении, проводимости и потенциале в условиях квантования холловского сопротивления.*

Рассмотрим еще некоторые неочевидные свойства двумерного электронного газа в условиях квантования его холловского сопротивления. В этих условиях, например, связь между удельным сопротивлением и проводимостью оказывается несколько неожиданной. Казалось бы, что в условиях, когда удельное сопротивление текущему в канале току  $r_{xx}$ , обращается в нуль, проводимость должна быть бесконечно велика, ведь мы привыкли, что  $\sigma$  и  $\rho$  обратно пропорциональны друг другу.

Но в данном случае это не так. Равенство нулю  $r_{xx}$  при конечном значении  $r_{xy}$  означает, что если мы пропускаем ток через двумерный электронный газ, то возникает электрическое поле, перпендикулярное току, то есть направленное по оси  $y$ , а поле вдоль тока равно нулю. Чтобы определить в этом случае проводимость, надо величину тока вдоль электрического поля разделить на напряженность поля. Электрическое поле направлено по оси  $y$ , а ток вдоль этой оси не течет. Поэтому  $\sigma_{yy}=0$ , то есть из условия  $\rho_{xx} = \rho_{yy}=0$  следует, что  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}=0$ .

Математически  $\rho_{xx}$ ,  $\rho_{xy}$ ,  $\rho_{yx}$  и  $\rho_{yy}$  можно представить как компоненты матрицы удельного сопротивления, а  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  и т.д. – как компоненты матрицы проводимости. Переход от одной матрицы к другой осуществляется с помощью операции обращения:

$$\begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} \\ r_{yx} & r_{yy} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Из этого равенства, и также из равенства  $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ , очевидно, справедливых в силу симметрии, сразу следуют соотношения:

$$y_{xx} = \frac{c_{xx}}{c_{xx}^2 + c_{xy}^2}, \quad y_{xy} = -\frac{c_{xy}}{c_{xx}^2 + c_{xy}^2}.$$

Для случая  $\rho_{xx}=0$  из этих равенств получаем:

$$y_{xx} = \frac{c_{xx}}{c_{xy}^2}; \quad s_{xy} = -r_{xy}^{-1}.$$

Теперь попробуем определить полное сопротивление нашего прибора проникающему через него электрическому току, или, другими словами, определить падение напряжения между контактами истока и стока. Первый ответ, который сразу приходит в голову, - напряжение равно нулю, т.к.  $r_{xx}=0$ , неверен.

Чтобы это доказать, рассмотрим, как распределен потенциал в канале при протекании там тока. Вдали от контактов истока и стока линии равного потенциала направлены вдоль тока, т.е. вдоль оси  $Ox$ . Это следует из равенства  $r_{xx}=0$ . Но вблизи контакта ситуация существенно изменяется. Концентрация электронов в контакте очень велика, так что контакт можно считать хорошим металлом. А это значит, что все точки контакта имеют один и тот же потенциал. Поэтому эквипотенциалы не могут пересечь границу контакта, и они вблизи контакта изогнутся так, как это показано на рис.85.

Ток же течет через контакт, так что вблизи контакта он уже не будет течь вдоль эквипотенциалов и здесь уже  $\rho_{xx}$  не может быть равно нулю.

Кроме того факта, что вблизи истока и стока  $\rho_{xx}$  не равно нулю, из рис. 85 можно определить и напряжение между истоком и стоком. Для этого надо сосчитать количество эквипотенциалов, которые мы пересечем, переходя от истока к стоку по любому пути внутри канала. Оно точно равно

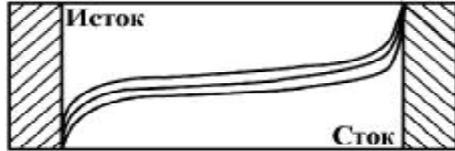


Рис.85.

количеству эквипотенциалов, пересекаемых при переходе с одного берега канала на другой в средней части канала. Отсюда следует, что и напряжение между истоком и стоком равно напряжению между берегами канала, т.е. холловскому напряжению  $U_H$ , а сопротивление между ними равно  $R_H$ . Повторив это рассуждение для любой другой пары контактов к двумерному слою, мы получим тот же результат – сопротивление,

измеренное между любой парой контактов к двумерному слою, равно  $R_H = \frac{h}{ie^2}$  не-

зависимо от размеров контактов, их расположения и расстояния между ними. Напомним, что это справедливо лишь при  $\rho_{xx}=0$ .

Проверка точности равенства  $R_H = \frac{h}{ie^2}$ .

Опыты свидетельствуют, что это соотношение выполняется с относительной точностью не хуже  $10^{-7}$  (измерения проводятся в достаточно сильном магнитном поле и при достаточно низкой температуре).

Эталон  $R$  имеет точность  $\sim 10^{-7}$ , то же и для правой стороны.

Величина  $a = \frac{e^2}{hc} \approx 137,035965 \pm 0,000012$  - постоянная тонкой структуры,

играющая важную роль в электромагнитных взаимодействиях, известна с точностью  $10^{-7}$ . Таким образом, прямой путь проверки точности квантования холловского сопротивления уже достигнут.

### *Дробное квантование холловского сопротивления.*

Дробное квантование – открытие более сенсационное, чем открытие квантового эффекта Холла.

Если увеличивать магнитное поле, то сначала появится плато квантового холловского сопротивления, затем новое третье, второе, первое... По теории дальше ничего нового не должно было появиться. Но вот появляется еще одно плато, за ним еще и еще... Так был открыт эффект дробного квантования холловского сопротивления.

В прежнем эффекте, который мы будем называть целочисленным квантованием, горизонтальные участки на зависимости  $\rho_{xy}$  от  $B$  или  $N$  и минимумы  $\rho_{xx}$  были связаны с окончанием заполнения одного уровня Ландау и началом заполнения следующего. Плато в дробном эффекте квантования холловского сопротивления соответствуют частичным заполнениям уровней Ландау. Одновременно с этим плато наблюдаются и минимумы  $\rho_{xx}$ .

В начале были обнаружены аномалии, соответствующие заполнению уровней Ландау на  $1/3$  и  $2/3$ . Затем к этим числам прибавились еще  $4/3$ ,  $5/3$ ,  $2/5$ ,  $3/5$ ,  $2/7$ . Объединяющим признаком всех этих чисел является нечетный знаменатель. В начале дробное квантование холловского сопротивления наблюдалось лишь на отдельных образцах, но затем было установлено, что этот эффект – общий эффект полевых транзисторов, то есть двумерного электронного газа. Для его наблюдения действительно требуется более чистые образцы и более низкие температуры, так как между уровнями, обуславливающими этот эффект, расстояния малы.

При объяснении целочисленного квантования не учитывалось взаимодействие электронов двумерного газа между собой. Возможно, что учет этого взаимодействия проявится в новых особенностях квантового эффекта Холла. Однако, окончательно объяснения дробного квантования еще нет.

## **§15. Проблема плотностей состояний электронов в квантующем магнитном поле**

Речь идет о распределении по энергиям разрешенных состояний двумерного электронного газа в сильном магнитном поле. Знание распределения позволяет вычислить практически все характеристики двумерного электронного газа, например, его проводимость, теплоемкость, магнитную восприимчивость и т.д. В теории квантового эффекта Холла также необходимо знать, сколь глубоки потенциальные «ямы» и высоки потенциальные «горы», на которых электроны локализованы.

Согласно теоретическим представлениям энергетическая плотность состояний  $D(e)$  (т.е. количество состояний на единицу энергии) должна быть максимальна вблизи середины уровня Ландау, а по мере удаления от середины она должна экспоненциально быстро спадать.

Действительно, потенциальные «горы» и «ямы» на уровнях Ландау образовались из-за случайных неоднородностей потенциала. Это означает, что и высота этих «гор» (и глубина «ям») является случайной величиной. Отсюда можно сделать вывод, что распределение плотности  $D$  по энергии  $e$  подчиняется гауссовому закону распре-

деления случайных величин  $D \sim \exp\left[-\frac{(e - e_i)^2}{\Gamma}\right]$ , где  $e_i$  – энергия середины уровня Лан-

дау,  $\Gamma$ - характерный размер неоднородностей (так называемая гауссова полуширина уровней).

Все измерения  $D(e)$  были основаны на определении (прямом или косвенном) зависимости энергии Ферми  $E_\phi$  двумерного электронного газа от концентрации электронов или от магнитного поля. Энергия Ферми – это статистическая характеристика коллектива частиц. Ясен ее физический смысл при  $T=0K$ . Распределение электронов по энергиям при  $T=0K$  определяется функцией Ферми-Дирака

$$r_{\phi-D} \sim \left\{ \exp \left[ \frac{(e - E_\phi)}{\kappa T} \right] + 1 \right\}^{-1}.$$

Выясним, как знание  $E_\phi$  позволяет определить  $D(e)$ .

Будем постепенно изменять концентрацию электронов в двумерном газе. Если расстояния по энергии между электронными состояниями вблизи энергии Ферми велики, то небольшое изменение концентрации приведет к значительному изменению  $E_\phi$ . Чем больше  $D(e)$ , тем слабее будет зависеть  $E_\phi$  от величины магнитного поля  $B$ . Она оказывается немонотонной. Чтобы понять это, рассмотрим сначала систему идеальных уровней Ландау. Пусть заполнены все уровни Ландау до  $i$ -го, а сам  $i$ -й уровень заполнен частично. Тогда энергия Ферми (при  $T=0K$ ) совпадает с энергией  $i$ -го уровня Ландау  $E_\phi = e_i$ . При увеличении магнитного поля  $e_i$  увеличивается, но увеличивается и число мест на уровнях Ландау  $N_B$ .

Электроны с  $i$ -го уровня переходят на уровень с меньшими энергиями, занимаемая образовавшиеся вакантные места. Наконец, на  $i$ -м уровне электронов не остается, и начинает опустошаться  $(i-1)$ -й уровень. Когда последний электрон покинет  $i$ -й уровень, энергия Ферми резко уменьшится от  $e_i$  до  $e_{i-1}$ , а затем опять начнет расти вместе с  $e_{i-1}$ . Таким образом, при нулевой температуре и идеально ровных уровнях Ландау зависимость  $E_\phi$  от магнитного поля  $B$  должна иметь вид пилы с участками постепенного возрастания  $E_\phi$ , сменяющимися резкими падениями (рис.86).

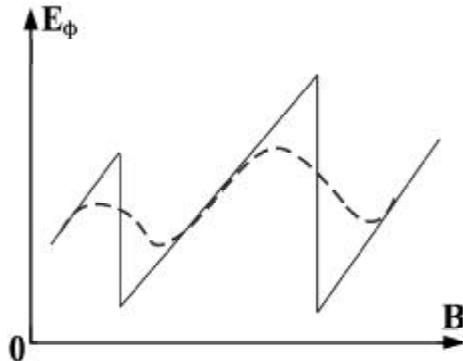


Рис.86.

Если уровни Ландау не идеальны, то углы сглаживаются (на рис. 86 пунктир). Исследуя отклонение формы кривой  $E_\phi(B)$ , можно определить распределение электронных состояний по энергиям.

Как же измеряется  $E_\phi$ ?

Можно поступить так. Измерить  $\rho_{xx}(T)$ . Выше говорилось, что  $r_{xx}$  в области  $\min$  пропорционально вероятности появления «лишних» электронов (или свободных мест) на дорожке, по которой течет ток.

Если  $E_\phi$  лежит в промежутке между  $e_{i-1}$  и  $e_i$  токовых дорожек на  $(i-1)$ -м и  $i$ -м энергетических уровнях, то при  $T=0K$   $r_{xx}=0$ . При этом все электронные состояния с  $e=e_{i-1}$  заполнены, а с  $e=e_i$  пусты. Вероятность появления электрона с  $e_i$  при  $T=0K$  определяется по формуле Ферми-Дирака. По этой же формуле можно определить и вероятность

появления свободных мест при  $e_{i-1}$ . В результате удельное сопротивление окажется пропорциональным выражению:

$$r_{xx} \sim \left\{ \exp \left[ \frac{(e_i - E_\phi)}{\kappa T} \right] + 1 \right\}^{-1} + 1 - \left\{ \exp \left[ \frac{(e_{i-1} - E_\phi)}{\kappa T} \right] + 1 \right\}^{-1}.$$

Измерив  $\rho_{xx}$  при нескольких значениях  $T$ , из этого соотношения, можно определить  $E_\phi$ .

Эксперимент дал некоторое несовпадение с теорией: плотность состояний убывала медленнее при удалении от середины уровня Ландау. По-видимому, здесь снова проявляется электрон-электронное взаимодействие, которое не мало, и порядка самой энергии Ферми.

## §16. Эффект де-Гааза-ван Альфена (1931г.)

Магнитные свойства металлов весьма разнообразны. И все же, несмотря на это разнообразие, существует такое магнитное свойство, которое, пожалуй, более металлическое, так как присуще всем металлам. Это - эффект де-Гааза-ван Альфена, который позволяет изучать поверхность Ферми, находя площади экстремальных сечений этих поверхностей Ферми, имеющих нередко (часто) очень сложную форму.

В этом методе исследуется электронный спектр, устанавливая осциллирующую зависимость магнитного момента от магнитного поля.

В последние годы было показано, что осцилляционные эффекты наблюдаются у большинства металлов, они являются общеметаллическим свойством.

Под осцилляцией понимается не какой-либо колебательный процесс, а просто периодическая зависимость магнитного момента от индукции магнитного поля.

Но эта зависимость наблюдается только у монокристаллов при низких температурах, и только в таких магнитных полях, в которых радиус орбиты электрона значительно меньше длины свободного пробега ( $r \ll l$ ). Обычно  $H \sim 10^4$  эрстед ( $\sim 1 Tl$ ).

Теория эффекта де-Гааза-ван Альфена была построена в 1954г. И.М.Лифшицем и А.М.Косевичем.

Экспериментально измеряется магнитный момент образца при гелиевых температурах в магнитных полях, изменяющихся как по величине, так и по направлению.

Поясним происхождение периодической зависимости магнитного момента от

обратной величины магнитного поля  $\left( \frac{1}{H} \right)$  Это следствие квантования уровней энергии электронов, а также вырождения электронного газа.

Мысленно представим себе схематическое изображение энергетических уровней электрона в магнитном поле. Жирными линиями отметим уровни энергии при  $p_z=0$  (в направлении оси  $Z$  движения электронов нет в двумерном электронном газе!). Тогда нам придется заштриховать область над жирными линиями, что будет означать наличие разрешенных уровней энергии с  $p_z \neq 0$  над уровнями с  $p_z=0$ . Пунктирной линией обозначим энергию Ферми. Расстояние между квантованными уровнями энергии окажется (во всяком случае, в условиях наблюдения эффекта де-Гааза-ван Альфена), значительно меньше, чем энергия Ферми. (При  $H=10^4$  эрстед  $\Delta e \sim 10^{-16}$  эрг,  $e_\phi \sim 10^{-12}-10^{-11}$  эрг).

Поэтому над энергией Ферми находится очень много уровней. Но, как мы уже знаем, главную роль играют «жители поверхности» – электроны с энергией, равной энергии Ферми. Электроны с данным значением числа  $n$  (с данным номером подзоны) участвуют в «игре» или нет в зависимости от того, находится ли  $e_n(0)$  под энергией Ферми или над ней. Будем теперь изменять магнитное поле (для определенности – увеличивать). Тогда вся система уровней начнет двигаться вверх и периодически будут выходить из «игры» подзоны – одна за другой. Период легко подсчитать из условия квантования:

$$S(\mathcal{E}, p_z) = 2pe\hbar B \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

При изменении обратного значения магнитного поля на величину

$$D \frac{1}{B} = \frac{2pe\hbar}{S_{extr}^\Phi}$$

число подзон, донья которых расположены ниже энергии Ферми, меняется на единицу. Здесь  $S_{extr}^\Phi$ , так как вблизи экстремальных сечений располагается

больше электронов с данным значением площади.

Точное рассмотрение вопроса показывает, что перед периодической функцией стоит маленький множитель, приблизительно равный

$$n m_B \left( \frac{m_B B}{e_\Phi} \right)^{1/2},$$

где  $n$  – число электронов в единице объема,  $m_B$  – магнитный момент одного электрона.

Если бы магнитное поле упорядочило магнитные моменты всех электронов, то магнитный момент металла был бы равен  $m_B n$ , но магнитное поле для этого слишком мало  $m_B n \ll e_\Phi$ . Отсюда – малый множитель  $\left( \frac{m_B H}{e_\Phi} \right)^{1/2}$ . Это характерное свойство квантовых осцилляционных эффектов: амплитуда осцилляций мала в меру малости отношения  $\frac{m_B H}{e_\Phi}$ . Характерное свойство, но необязательное.

Вот коэффициент поглощения звука в квантовом магнитном поле такого множителя не имеет. Поэтому осцилляции коэффициента поглощения величают «гигантскими».

Эффект де-Гааза-ван Альфена исследован не до конца. Совсем недавно обнаружено явление, когда обычный металл в магнитном поле при низких температурах разбивается на систему доменов.