

то есть

$$\sigma_{кл} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Опыт же даёт $\sigma_{опыт} \sim \frac{1}{T}.$

Согласно квантовым представлениям (см. гл.1, §13), электроны-фермионы, их концентрация и средняя скорость не зависят от температуры (см. гл.4, §5 “Закон Видемана-Франца”). Длина же свободного пробега $\bar{l}_{эл} \sim \frac{1}{T}$, откуда и $\sigma \sim \frac{1}{T}$, что соответствует эксперименту.

§5. Закон Видемана-Франца

Наличие в металлах электронного газа обуславливает не только перенос электрического заряда под действием внешнего электрического поля, но и перенос энергии при наличии градиента температуры. Поэтому естественно ожидать, что между электропроводностью σ и электронной теплопроводностью $\kappa_{эл}$ должна существовать связь. Экспериментально эта связь была установлена Г. Видерманом и П.Францем, а теоретически обоснована Л. Лоренцом.

Суть закона состоит в том, что отношение коэффициентов теплопроводности $\kappa_{эл}$ и проводимости пропорционально температуре:

$$\frac{\kappa_{эл}}{\sigma} = LT, \quad (4.5.1)$$

где L – коэффициент пропорциональности носит название коэффициента Лоренца.

Для установления этого соотношения воспользуемся формулой, которую получают для коэффициента теплопроводности на основе положений молекулярно кинетической теории (выше мы использовали такую формулу для фононного газа при расчёте коэффициента теплопроводности решётки $\kappa_{реш.}$) (гл.2, §11):

$$\kappa_{эл} = \frac{1}{3} C_{эл} V_{эл} \lambda_{эл}, \quad (4.5.2)$$

где $C_{эл}$ – удельная теплоемкость электронного газа, $V_{эл}$ и $\lambda_{эл}$ – скорость теплового движения и длина свободного пробега электронов.

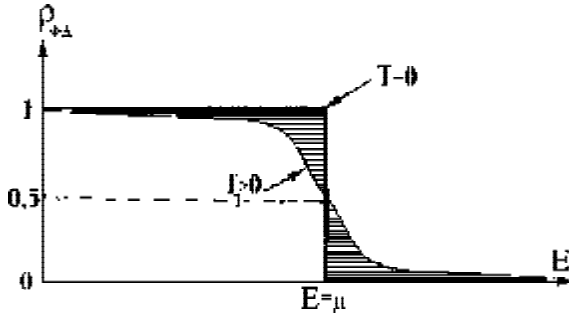


Рис. 8б.

На графике функции распределения $\rho_{\Phi-D} = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$ Ферми-Дирака (см.

рис. 8б) кривая при $T_1 > 0K$ свидетельствует, что часть ΔN электронов, состояния которых находятся вблизи $E = \mu$ - энергии Ферми (максимальной энергии электронов при $T = 0K$), возбуждаются благодаря приобретению энергии kT_1 . Естественно, что $\Delta N:N$, пропорционально отношению $kT_1:m$, то есть

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{kT_1}{\mu},$$

откуда $\Delta N = \frac{kT_1}{\mu} N$, где N - полное число свободных электронов.

Легко подсчитать, что $\frac{\Delta N}{N} \sim 0,001$ при $T_1 = 300K$, лишь ничтожная часть элект-

ронов может дать вклад в теплоёмкость металла. Именно поэтому основной вклад при комнатных температурах даёт кристаллическая решетка.

Иначе обстоит дело при сверхнизких температурах, когда теплоемкость металлов определяется электронами, так как решеточная теплоемкость убывает по закону Дебая (гл. 2, §11) $\sim T^3$, в то время как

$$C_{эл} \sim T. \text{ Действительно, } E_{эл} \cong \Delta N \cdot \frac{3}{2} kT \sim T^2.$$

При этом мы вполне законно считаем электронный газ невырожденным в силу его малой концентрации и применяем классическую теорию о равномерном распре-

делении энергии по степеням свободы, что определило $C_{эл} = \frac{dE_{эл}}{dT} \sim T$,

или, точнее, $C_{эл} = 3Nk^2 \frac{T}{\mu}$.

Подставим это значение $C_{эл}$ в формулу для $\aleph_{эл}$ (4. 5. 2):

$$\aleph_{эл} = \frac{3Nk^2}{3\mu} V_{\phi} \lambda_{\phi} T = \frac{Nk^2}{\mu} V_{\phi} \lambda_{\phi} T, \text{ где } V_{\phi} - \text{ скорость электронов,}$$

соответствующая энергии Ферми, l_{ϕ} – длина свободного пробега электронов при тех же условиях. Заменим $\mu \approx mV_{\phi}^2$,

тогда $\aleph_{эл} = \frac{Nk^2 l_{cp} T}{mV_{\phi}}$.

С другой стороны, удельная проводимость $s_{эл}$ (мы получим ее, рассматривая решение кинетического уравнения Больцмана, см. гл.4 §6) равна $s = \frac{e^2 n l_{\phi}}{m V_{\phi}}$.

Составим отношение

$$\frac{\aleph}{\sigma} = \frac{k^2}{e^2} T.$$

Более точные расчеты вносят лишь поправку в коэффициент при T -коэффициент Лоренца.

Закон Видельмана-Франца подтверждается экспериментально, что свидетельствует о достоверности проведенных рассуждений.

§6. Кинетическое уравнение Больцмана

Большой теоретический и практический интерес представляет изучение электронов (дырок) проводимости в неравновесном состоянии, когда они движутся в кристалле под действием приложенных внешних полей: электрического, магнитного, температурного, диффузионного и др. Такие процессы называются явлениями переноса или кинетическими эффектами.

Для стационарных процессов (не зависящих от времени) необходимо, чтобы электроны отдавали накопленную энергию, взаимодействуя с дефектами кристаллической решётки. Поэтому одной из характеристик процесса будет средняя скорость электронов в направлении процесса. Её значение определяется механизмом взаимодействия.

Введём неравновесную функцию распределения (в равновесном состоянии в классической статистике – это функция Гиббса, для квантовых частиц – функция Бозе-Энштейна для бозонов и функция Ферма-Дирака для фермионов):

$$\begin{aligned} f(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t) dx dy dz dV_x dV_y dV_z = \\ = f(\mathbf{r}, V, t) d^3 r d^3 V. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

По определению функция f определяет число электронов в момент времени t в точке, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$ в объёме:

$$f(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t) dx dy dz dV_x dV_y dV_z = f(\vec{r}, \vec{V}, t) d^3r d^3V.$$

со скоростями, лежащими в интервале от V_x до $V_x + dV_x$ и т.д. Будем называть эти электроны - V электронами и считать их классическими.

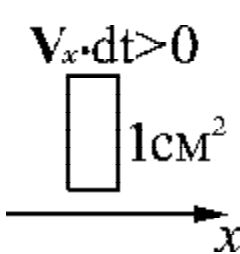


Рис.74.

Зная функцию $f(\vec{r}, \vec{V}, t)$, можно вычислить плотность тока в окрестности точки $\vec{r}$ в момент времени t . Рассмотрим единичную площадку $S=1 \text{ см}^2$, расположенную перпендикулярно к оси OX и плоскости чертежа (рис.74). Все электроны, расположенные в цилиндре шириной $V_x dt$ пересекут нашу площадку. Их число равно $f(\vec{r}, \vec{V}, t) \cdot d^3\vec{V} \cdot V_x dt$.

Полное число всех электронов со всевозможными скоростями, пересекающих площадку за время dt в обоих направлениях равно:

$$dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{V}, t) V_x dV_x dV_y dV_z.$$

Учитывая заряд электронов $(-e)$ и определение плотности тока, получаем:

$$j_x = -e \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{V}, t) V_x dV_x dV_y dV_z. \quad (4.6.2)$$

Представим неравновесную функцию распределения в виде

$$f(\vec{r}, \vec{V}, t) = f_0(e) + f_1(\vec{r}, \vec{V}, t),$$

где $f_0(e)$ - функция равновесного состояния.

Так как $f_0(e)$ - функция Максвелла является четной функцией от V_x ,

а в равновесном состоянии нет направленного движения электронов ($j_{0_x} \equiv 0$), то

интеграл в (4.6.2) по dV_x от $f_0(e) V_x$ равен нулю. Тогда вместо (4.6.2) получаем:

$$j_x = -e \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) V_x dV_x dV_y dV_z. \quad (4.6.3)$$

Основной задачей теории кинетических явлений является определение неравновесной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$, а вернее $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$

Выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$

Рассмотрим изменение числа V — электронов за время dt в результате их движения в обычном пространстве n .

Воспользуемся рис. 75. Через левую грань объема $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ зайдут электроны:

$$f(x, y, z, \mathbf{V}, t) dydz \cdot V_x dt \cdot d^3V.$$

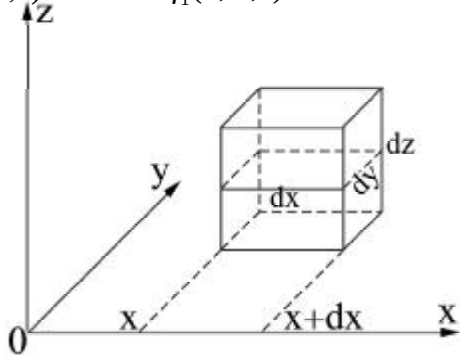


Рис.75.

Через правую грань уходят электроны

$$f(x+dx, y, z, \mathbf{V}, t) dydz \cdot V_x dt \cdot d^3V.$$

(При этом предполагается, что $V_x > 0$)

В результате в объеме dv произойдет изменение числа электронов:

$$\begin{aligned} & f(x, y, z, \mathbf{V}, t) dydz V_x dt d^3V - f(x+dx, y, z, \mathbf{V}, t) dydz \cdot V_x dt \cdot d^3V = \\ & = -V_x [f(x+dx, y, z, t, \mathbf{V}) - f(x, y, z, \mathbf{V}, t)] dydz d^3V \cdot dt = \\ & = -V_x \frac{\partial f}{\partial x} dx dydz d^3V \cdot dt, \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

где произведено разложение в ряд Тэйлора функции $f(x+dx, y, z, \mathbf{V}, t)$ и оставлены первые два члена разложения.

Аналогично можно определить изменение числа $\dot{\mathbf{V}}$ — электронов в объеме $d^3\mathbf{V} = dV_x \cdot dV_y \cdot dV_z$ в результате их движения в $\dot{\mathbf{V}}$ — пространстве со «ско-
ростями» $\dot{\mathbf{V}}_x \dot{\mathbf{V}}_y \dot{\mathbf{V}}_z$. Это изменение равно

$$\begin{aligned} & -(\mathbf{V} \nabla_J f) d^3\mathbf{V} \cdot d^3\mathbf{r} \cdot dt = -\mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} d^3\mathbf{V} \cdot d^3\mathbf{r} \cdot dt = \\ & = -\frac{1}{m} (F \nabla_J f) d^3\mathbf{V} \cdot d^3\mathbf{r} \cdot dt, \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

где $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$; $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ — сила, действующая на электрон в точ-
ке $\mathbf{r}$, в момент времени t .

Упростим задачу и будем рассматривать лишь абсолютно упругие столкнове-
ния электронов с дефектами решетки. Это означает, что у электронов может изменять-
ся направление движения, но не модуль скорости: $\mathbf{V}' \equiv \mathbf{V}$.

Учтем вклад всевозможных абсолютно упругих столкновений.
Пусть

$$W(\mathbf{V}, \mathbf{V}') \cdot d\Omega' \cdot dt.$$

вероятность $\dot{\mathbf{V}}$ — электрону за время dt упруго рассеяться в элементарный
телесный угол $d\Omega'$ около направления $\dot{\mathbf{V}}$.

Число электронов, исчезающих за время dt в результате столкновений равно:

$$- \int_{\Omega'} f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{V} W(\mathbf{V}, \mathbf{V}') d\Omega' dt. \quad (4.6.6)$$

С другой стороны, число $\dot{\mathbf{V}}$ — электронов будет возрастать в результате столк-
новений $\dot{\mathbf{V}}$ — электронов и перехода их в $\dot{\mathbf{V}}$ — электроны (в том же объеме $d^3\mathbf{r}$):

$$\int_{\Omega'} f(\mathbf{r}, \mathbf{V}', t) d^3 \mathbf{V}' \cdot d^3 \mathbf{r} \cdot W(\mathbf{V}', \mathbf{V}) d\Omega' dt. \quad (4.6.7)$$

Общее изменение числа $\mathbf{V}$ - электронов из-за столкновений равно:

$$\int [f(\mathbf{r}, \mathbf{V}', t)W(\mathbf{V}', \mathbf{V}) - f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)W(\mathbf{V}, \mathbf{V}')] d\Omega' \cdot d^3 \mathbf{r} \cdot d^3 \mathbf{V} \cdot dt. \quad (4.6.8)$$

Если учесть, что

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t + dt) d^3 \mathbf{r} \cdot d^3 \mathbf{V} - f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) d^3 \mathbf{r} \cdot d^3 \mathbf{V} = \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{r} \cdot d^3 \mathbf{V} \cdot dt$$

есть возрастание числа $\mathbf{V}$ - электронов за время dt , то мы получаем следующее уравнение, которому удовлетворяет функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & -(\mathbf{V} \nabla_{\mathbf{r}} f) - \frac{1}{m} (\mathbf{F} \nabla_{\mathbf{V}} f) + \\ & + \int [W(\mathbf{V}'/\mathbf{V}) f(\mathbf{r}, \mathbf{V}'/t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) W(\mathbf{V}, \mathbf{V}')] d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Уравнение (4.6.9) называется кинетическим уравнением Больцмана для нахождения неравновесной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$.

Первые два слагаемых справа образуют так называемый полевой член уравнения Больцмана:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{пол}} = -(\mathbf{V} \nabla_{\mathbf{r}} f) - \frac{1}{m} (\mathbf{F} \nabla_{\mathbf{V}} f). \quad (4.6.10)$$

Он определяет скорость изменения функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$ в результате непрерывного движения электронов в $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ — пространствах. Последнее слагаемое в (4.6.9) называется членом столкновений:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{cm} = \int \left[f\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{V}'}{V}, t\right) W\left(\frac{\mathbf{V}'}{V}, \frac{\mathbf{r}}{V}\right) - f\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{r}}{V}, t\right) W\left(\frac{\mathbf{r}}{V}, \frac{\mathbf{V}'}{V}\right) \right] d\Omega' . \quad (4.6.11)$$

Он определяет скорость изменения функции f в результате столкновений (рассеяния при $\mathbf{V}' \equiv \mathbf{V}$) электронов.

В стационарном случае:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{nol} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{cm} \equiv 0 \quad (4.6.12)$$

$$\begin{aligned} \text{или } \mathbf{\hat{V}} \nabla_r f + \frac{1}{m} \mathbf{\hat{F}} \nabla_V f &= \\ &= \int \left[f\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{V}'}{V}\right) W\left(\frac{\mathbf{r}'}{V'}, \frac{\mathbf{r}}{V}\right) - f\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \frac{\mathbf{r}}{V}\right) W\left(\frac{\mathbf{r}}{V}, \frac{\mathbf{V}'}{V}\right) \right] d\Omega' . \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Из-за вида правой стороны уравнения (4.6.13) следует, что это уравнение является интегро-дифференциальным.

Покажем, что в данной задаче принцип соответствия приводит к тому, что в равновесном состоянии системы уравнение (4.6.13) будет удовлетворяться функцией Гиббса, которую мы запишем так:

$$\begin{aligned} f_0(e) &= \exp \frac{m - e}{kT}, \\ \text{где } e &= \frac{mV^2}{2} + U(r). \end{aligned}$$

Приравняв правую сторону уравнения (4.6.13) к нулю (по смыслу равновесного состояния), составим члены левой стороны уравнения (4.6.13):

$$\mathbf{\hat{V}} \nabla_r f_0(e) = \frac{1}{kT} f_0 \cdot \mathbf{\hat{V}} (-\nabla_r U) = \frac{1}{kT} f_0 (\mathbf{\hat{V}} \mathbf{\hat{F}})$$

и

$$\frac{1}{m} \mathbf{\hat{F}} \nabla_V f_0(e) = -\frac{1}{m} \mathbf{\hat{F}} \frac{m \mathbf{\hat{V}}}{kT} \cdot f_0 = -\frac{1}{kT} f_0 (\mathbf{\hat{V}} \mathbf{\hat{F}}).$$

Мы имели право приравнять уравнение (4.6.13) к нулю при произвольном $\mathbf{V}$ — только при условии, что

$$W(\dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{V}}') = W(\dot{\mathbf{V}}'\dot{\mathbf{V}}),$$

то есть когда прямые и обратные переходы равновероятны.

Это условие есть содержание так называемого принципа детального равновесия.

В качестве примера рассмотрим движение электронов во внешнем постоянном электрическом поле, направленном вдоль оси Ox :

$$\left| \frac{\mathbf{r}}{E} \right| \equiv E_x.$$

Функцию распределения запишем так:

$$f = f_0 + f_1 = f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial e} c(e) V_x, \quad (4.6.14)$$

где $c(e)$ - некоторая функция энергии

$$e = \frac{m}{2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2).$$

Подставляя (4.6.14) в (4.6.11), учитывая, что столкновения упругие $e' = e$ и принцип детального равновесия выполняется, получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = -f_1 \int W(\mathbf{V}, \mathbf{V}') \cdot (1 - \cos \Theta) \cdot d\Omega', \quad (4.6.15)$$

где $\cos \Theta = \frac{V_x'}{V_x}$ (см. рис. 76).

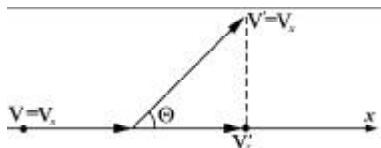


Рис.76.

Так как $W(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ имеет размерность, обратную времени (это следует из определения величины W , данного выше), то можно ввести время релаксации t следующим образом:

$$\frac{1}{t} = \int W(\mathbf{V}, \mathbf{V}') \cdot (1 - \cos \Theta) \cdot d\Omega'. \quad (4.6.16)$$

Из (4.6.15) и (4.6.16) следует, что:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = -\frac{f_1}{t} = -\frac{f - f_0}{t}. \quad (4.6.17)$$

Полагая, $\nabla_r f = 0$ и $\vec{F} = 0$, имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{t}. \quad (4.6.18)$$

Элементарное интегрирование (4.6.18) дает:

$$(f - f_0) = (f - f_0) \Big|_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.6.19)$$

Из (4.6.19) следует физическое содержание величины τ : это время, в течение которого разность $(f - f_0)$ при выключении внешнего поля уменьшается в e раз. Учитывая, что переход к равновесному состоянию происходит за счет столкновений и достаточно нескольких этих взаимодействий, то можно считать, что время релаксаций τ порядка времени свободного пробега электрона, длина которой равна:

$$l = V \cdot \tau. \quad (4.6.20)$$

Во многих случаях отклонение системы от равновесного состояния мало, то есть $f_1 \ll f_0$, поэтому в уравнении Больцмана можно заменить f на f_0 . Тогда при наличии только одного электрического поля из (4.6.13) и (4.6.17) следует:

$$f_1 = -\frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial V_x} t = -e E \frac{f_0}{kT} t V_x. \quad (4.6.21)$$

Продолжим расчеты и определим удельную проводимость электрической цепи при наличии одного электрического поля.

Воспользуемся формулой (4.6.3):

$$j_x = -e \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\vec{r}, \vec{V}, t) V_x dV_x dV_y dV_z. \quad (4.6.3)$$

Сделаем подстановку f_1 из (4.6.21):

$$j_x = e \int_{-\infty}^{+\infty} e E \frac{f_0}{kT} t V_x \cdot V_x dV_x dV_y dV_z =$$

домножим на $\frac{2m}{2m}$

$$= \frac{2e^2 E \phi}{k T m} \cdot G \cdot \int \frac{m V_x^2}{2} f_0 dV_x,$$

где множитель G получается от интегрирования по V_y и V_z .

Интеграл $\int \frac{m V_x^2}{2} f_0 dV_x$ по своему статистическому смыслу дает среднюю

кинетическую энергию, которая на основании классической теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы будет равна $\frac{1}{2} k T$.

$$\text{Итак, } j_x = e^2 t \frac{E}{m} = \frac{e^2 \bar{l}}{m \bar{V}} E = s E_x,$$

а это есть закон Ома в дифференциальной форме.

Предыдущие расчеты проводились для движения одного электрона. Учитывая, что в единице объема содержится n_0 электронов, получаем

$$s = \frac{e^2 \bar{l} n_0}{m \bar{V}}. \quad (4.6.22)$$

Применяя формулу (4.6.22) к полупроводникам, необходимо различать две составляющие их электропроводности: электронную и дырочную. Тогда результирующая проводимость собственного полупроводника будет

$$s = s_{эл} + s_{дыр} = \frac{e^2 n_e^- t^-}{m^-} + \frac{e^2 n_e^+ t^+}{m^+}. \quad (4.6.23)$$

Хотя у собственного полупроводника $n_e^- = n_e^+$, однако массы m^- и m^+ ,

а также времена t^- и t^+ не равны друг другу попарно. Под m^- и m^+ надо понимать эффективные массы электрона и дырки. Но эффективная масса – понятие кванто-механическое, а все предыдущие расчеты проводились в классическом приближении.

По определению $t = \frac{\bar{l}}{V}$. И здесь классический и квантовый подходы дают раз-

ные функциональные зависимости. С классической точки зрения

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m}} \sim T^{1/2}, \text{ другие величины в } S \text{ от температуры не зависят. Экспери-}$$

$$\text{мент же дает иное: } S \sim \frac{1}{T}.$$

Только квантово-механическое рассмотрение проблемы устранило затруднение классической электронной теории.

Дело в том, что для квантово-механического описания электронов необходимо использовать не статистику Гиббса, а статистику Ферми-Дирака. Как известно (см. гл.1, §13), согласно последней статистике скорость электронов в широком диапазоне температур остается практически постоянной и равной V_ϕ - скорости, соответствующей энергии Ферми (см. рис.8б). Вместе с тем от температуры зависит длина свободного

пробега $\bar{l}$, определяемая рассеянием электронов на фононах: $\bar{l} \sim \frac{1}{T}$. Качественно

такую зависимость можно объяснить так. Длина свободного пробега связана с амплитудой тепловых колебаний атомов равенством:

$$l = \frac{1}{n_p a_1^2},$$

где n_1 – концентрация атомов, $p a_1^2$ - площадь круга радиуса a_1 , a_1 – амплитуда колебаний атомов.

В области высоких температур (см. гл.2, §11), когда $T \gg T_d$ (T_d – температура Дебая) и классическая, и квантовая теории теплоемкости твердых тел приводят к одинаковым результатам, можно использовать классическую теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы:

$$\frac{1}{2} a a_1^2 = \frac{1}{2} kT,$$

где a – коэффициент квазиупругой силы.

Объединяя последние две формулы, получаем, что

$$l \sim \frac{1}{T}.$$

Для электронов вблизи поверхности Ферми $l = V_\phi \cdot t$,

откуда $t_\phi \sim \frac{1}{T}$. В области низких температур $\frac{T}{T_d} \ll 1$ и $t_\phi \sim \frac{1}{T^5}$, следова-

тельно, удельное сопротивление $r \sim T^5$. Действительно, в области низких температур столкновение электрона с одним фононом не может существенно изменить импульс электрона. Поэтому так называемая транспортная длина свободного пробега

$$L \sim \frac{n_{cm}}{n_\phi}, \text{ где } n_\phi - \text{концентрация фононов, } n_{cm} - \text{число столкновений, которые при-}$$

водят к изменению импульса электрона. Очевидно, что $L = n_{cm} \cdot l$. В области низких

температур $n_\phi \sim T^3$.

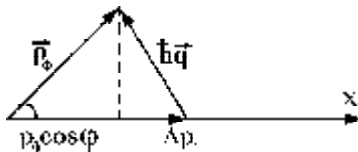


Рис.77.

На рис.77 изображено изменение импульса электрона при поглощении фонона с

импульсом $hq \approx \frac{kT}{V}$. В области низких температур $hq \ll p_\phi$. Поэтому после по-

глощения фонона импульс электрона p_ϕ' мало отличается по модулю и по направле-

нию от импульса электрона p_ϕ до поглощения фонона.

Изменение импульса электрона вдоль первоначального направления определяется равенством:

$$\Delta p_x = p_\phi - p_\phi \cos j = p_\phi (1 - \cos j) \approx p_\phi \frac{j^2}{2},$$

$$\text{где } \cos j \approx 1 - \frac{j^2}{2} + K$$

С другой стороны, из рис.77 видно, что $hq \sim p_\phi \cdot j$. Исключая из последних равенств величину j , получаем:

$$\Delta p_x = \frac{(hq)^2}{2p_\phi}.$$

Отсюда видно, что для изменения импульса электрона на величину $\sim p_\phi$ необходим целый ряд столкновений, число n_{cm} которых может быть определено из условия

$$n_{\phi} \cdot \Delta p_x \sim p_{\phi}.$$

$$\text{Итак, } n_{ст} \sim \left(\frac{j p_{\phi}}{kT} \right)^2, \text{ поэтому } L \sim \frac{1}{T^5}, \text{ а } r \sim T^5, \text{ что согласует-}$$

ся с экспериментом.

Рассмотрим качественно решение уравнения Больцмана для явления теплопроводности. Формально этот процесс в твердых телах можно рассматривать как процесс переноса не электрического заряда, а энергии. Поэтому все предыдущие рассуждения

можно сохранить, рассматривая не градиент электрического поля $\vec{E} = -\nabla j$, а градиент температуры, приводящий к переносу энергии вдоль решетки. Эквивалентом электрона в данном процессе будет фонон. Исходя из положений молекулярно-кинетической теории, запишем:

$$\kappa_{реш} \equiv \kappa_{фон} = \frac{1}{3} l \cdot u \cdot c,$$

где l – средняя длина свободного пробега фонона, c – теплоемкость решетки (единицы объема), u – средняя скорость фононов (звука), κ – коэффициент теплопроводности твердого тела.

В диэлектриках вся теплопроводность обусловлена фононами, в металлах же теплопроводность электронов превышает фононную на два порядка:

$$\frac{\kappa_{эл}}{\kappa_{реш}} = \frac{\frac{1}{3} l \bar{V} c_{эл}}{\frac{1}{3} l \cdot u \cdot c_{реш}} \sim 10^2.$$

Длина свободного пробега электронов является усредненной величиной в силу рассеяния на фононах и других дефектах кристаллической решетки. Считая механизмы рассеяния независимыми друг от друга, Мартиссен установил следующее правило аддитивности:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{реш}} + \frac{1}{l_{прим}} + \frac{1}{l_{остаточ.}}, \quad \text{или } r = r_{ид} + r_{деф}.$$

В сверхпроводниках электроны не принимают никакого участия в создании теплопроводности, так как куперовские пары не взаимодействуют с решеткой. Теплопроводность имеет чисто решеточный характер.