§ 13. Решение задач по динамике СТО

Рассмотрим решение ряда типичных задач на формулу Эйнштейна и следствия, вытекающие из нее.

Задача № 1.

На сколько увеличится масса 1 кг воды при нагревании ее от 0°С до 100° С?

Найти:	Δm
Дано:	$m = 1кг$ $\Delta t = 100^0 C$ $c = 3\cdot 10^8 м/с$ $c_p = 4{,}2 кДж/кг\cdot K$

Решение

Выберем такую ИСО, в которой вода была бы неподвижна, это избавит нас от необходимости учитывать дополнительную кинетическую энергию воды. Назовем избранную ИСО "Лаборатория".

Из формулы Эйнштейна $E_0=mc^2$ непосредственно следует, что если энергия тела увеличивается на ΔE (в нашем случае внутренняя энергия воды увеличивается за счет притока энергии из-за процесса, который мы называем "нагреванием"), то увеличивается и ее масса на величину $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$. (Внимание! Величина Δm в данной задаче не является дефектом массы, а лишь определяет изменение массы тела в результате нагревания.)

Увеличение внутренней энергии воды можно определить по формуле: $\Delta E = mc_p\Delta t$. Таким образом

$$\Delta m = \frac{mc_p\Delta t}{c^2} = 4{,}7\cdot 10^{-12}\,кг$$

Конечно, изменение массы воды оказалось бесконечно малым. Но если сравнить эту величину с массой электрона

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} кг$, то величина Δm будет уже представляться бесконечно большой, т.к. $\dfrac{\Delta m}{m_e} \approx 10^{18}$! Здесь мы убеждаемся в том, что в физике не имеет смысла говорить “малая” или “большая” величина, не указывая ориентир, по отношению к которому данная величина “малая” или “большая”.

Задача № 2.

Пружину с коэффициентом жесткости к=6.10^5 Н/м сжали на 1 см. Каков прирост массы пружины?

Найти	Δm
Дано	$m = 1 кг$ $\Delta t = 100^0 C$ $c = 3 \cdot 10^8 м/с$ $c_p = 4{,}2 кДж/кг \cdot К$

Решение

Как и в предыдущей задаче, выберем ИСО “Лаборатория”.

Изменение энергии упруго деформированной пружины можно рассчитать по формуле:

$$\Delta E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}.$$

С другой стороны, это изменение энергии связано с изменением массы пружины по формуле:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получаем, что

$$\Delta m = \frac{k(\Delta x)^2}{2 \cdot c^2} = 5 \cdot 10^{-17} кг.$$

В связи с этой задачей, читателю предоставляется возможность ответить на следующие качественные вопросы: куда девается дополнительная энергия сжатой пружины из железа после растворения ее в кислоте? Выделяется ли при сгорании дров, поднятых на 2-й этаж, та дополнительная энергия, которая сообщается им при поднятии на высоту 2-го этажа?

Задача № 3

Определить энергию связи ядра атома гелия, состоящего из двух протонов и двух нейтронов.

Найти	U
Дано	$M_{He} = 4.00390 а.е.м.$ $M_H = 1.008123 а.е.м.$ $M_n = 1.00893 а.е.м.$ $p = 2; \quad n = 2$

Решение.

Чтобы исключить из рассмотрения всякие другие виды энергии, кроме энергии связи, выберем систему отсчета, связанную с самим ядром атома гелия.

По определению, дефект массы равен:

$$\Delta m = 2M_H + 2M_n - M_{He}.$$

При этом массы электронов, входящих в массы атомов водорода и гелия, автоматически исключаются. Учитывая, что одна атомная единица массы (а. е. м.) равна $1{,}66.10^{-24}$ г, получаем:

$$\Delta m = 4{,}98 \cdot 10\text{-}^{29} \text{ кг}.$$

По определению, энергия связи равна:

$$|U| = \Delta m c^2 = 44{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 28 \text{ МэВ}.$$

Известно, что энергия химической связи в молекуле воды порядка 6 эВ. Сравнивая эту величину с энергией связи нуклонов в ядре атома гелия, понимаем, почему атомные ядра прочны и существуют миллиарды лет, в то время как некоторые химические соединения могут быть разрушены или нагреванием, или освещением.

Задача № 4

Рассчитать энергетический выход в реакции синтеза тяжелого водорода (дейтерия) и сверхтяжелого водорода (трития) с образованием ядра атома гелия и нейтрона.

Найти	$\lvert U \rvert$
Дано	$M_H{}^2$=2,014708 а. е. м. $M_H{}^3$=3,01700 а. е. м. $M_{He}{}^4$ =4,00390 а. е. м. M_n= 1,00893 а. е. м.

Решение.

Будем рассматривать процесс синтеза в ИСО “Лаборатория”.

Реакция синтеза протекает так:

$$H_1^2 + H_1^3 \rightarrow He_2^4 + n_0^1.$$

Для дефекта массы получаем следующую величину

$$\Delta m = M_{H_1^2} + M_{H_1^3} - M_{He_2^4} - M_{n_0^1} = 0{,}0189 \text{ а. е. м.} = 3{,}0 \cdot 10^{-29} \text{ кг.}$$

Следовательно, высвобождающаяся энергия (в форме кинетической энергии разлетающихся He и нейтрона) равна

\U\ = 27 .10^{-13} Дж = 17 МэВ.

Термоядерные реакции сулят человечеству безграничное количество энергии. Трудность осуществления регулируемой термоядерной реакции связана, в первую очередь, с необходимостью преодолеть кулоновское отталкивание одноименно заряженных ядер водорода и трития. Именно для преодоления этого отталкивания плазму из этих ядер нагревают до десятков миллионов градусов, что позволяет за счет кинетической энергии частиц плазмы совершить работу против кулоновских сил отталкивания. Но у регулируемого синтеза легких элементов есть и другие трудности, преодолеть которые пока не удается.

Задача №5. Эффект Комптона

Одним из положений электродинамической картины мира, построение которой завершилось к началу XX в., (после возникновения специальной теории относительности), было утверждение, что материя существует в двух видах: в виде вещества и в виде электромагнитного поля. Вещественные тела состоят из непроницаемых, локализованных в пространстве частиц (атомов, молекул, ионов, электронов). Полевое состояние материи (материальность электромагнитного поля утвердила в 1905 г. специальная теория относительности) обладает характерным для этого вида материи свойством суперпозиции, т.е. в одном и том же геометрическим объеме может находиться множество полей, переменные во времени поля распространяются от места своего возникновения в виде волн. В электродинамической картине мира считалось, что свойства этих двух видов материи несводимы друг к другу, слишком контрастны эти свойства (впоследствии, после возникновения квантовой механики, была построена новая квантово-полевая картина мира, в которой было установлено единство вещественного и полевого видов материи).

Первое серьезное затруднение в электродинамической картине мира возникло в 1887 г., когда немецкий физик Г. Герц обнаружил новое физическое явление: под воздействием света отрицательно заряженная металлическая пластинка разряжалась, теряла заряд. После открытия электрона Томсоном в 1897г. было установлено, что отрицательно заряженная металлическая пластинка под действием света теряет электроны. Российским физиком А.Г.Столетовым были установлены законы фотоэффекта (так было названо явление, открытое Герцем). Однако объяснить эти законы с позиций классической физики не удавалось, свет при этом рассматривался как волновой процесс.

В 1905 г. А. Эйнштейн подошел к проблеме фотоэффекта принципиально по-новому. Развивая идею М. Планка о том, что атомы излучают и поглощают энергию порциями, А. Эйнштейн предположил, что электромагнитное излучение и распространяется в пространстве порциями, квантами. Впоследствии этим дискретным порциям электромагнитного поля дали название “фотоны”. Приписав порциям электромагнитного излучения свойства частиц-корпускул, А. Эйнштейн составил уравнение, объяснявшее все особенности фотоэффекта. Это уравнение, выражавшее закон сохранения и превращения энергии, для фотоэффекта из металла записывается так:

$$hn = A + \frac{mv^2}{2},$$

где слева стоит энергия фотона, которая расходуется на отрыв электрона из металлического образца (A - “работа выхода”) и на сообщение ему (если $A<h\nu$) кинетической энергии. За более подробным разбором законов фотоэффекта отсылаем читателя к специальной литературе (например, к учебному пособию “Физика - 11”). А сейчас же обратим внимание на ту сторону явления, которое нас интересует по условию задачи и связано со специальной теорией относительности: электромагнитное излучение обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами. В истории физики это было первое явление, в котором проявлялся так называемый корпускулярно-волновой дуализм элементарных частиц, положенный затем в основу квантовой механики.

Оказалось, что в природе существуют и другие явления, в которых проявляются корпускулярные свойства излучения. Так, в 1923 г. американский физик А. Х. Комптон наблюдал рассеяние электромагнитного излучения на неподвижных электронах. Как и в случае с фотоэффектом, явление Комптона можно было объяснить, если считать, что излучение обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами. Причем для количественного объяснения этого явления нужно опираться на выводы СТО.

Рассмотрим теорию этого явления (эффект Комптона) в форме задачи. При рассеянии электромагнитного излучения на неподвижном электроне, происходит как изменение энергии рассеянного излучения, так и изменение направления его распространения.

Исходя из корпускулярных свойств фотона, рассчитаем изменение длины волны излучения, а также найдем энергию, приобретаемую электроном.

Найти	$\Delta\lambda, E_{кин}$	
Дано	λ m $p_ф = \dfrac{h\nu}{c}$ $E_ф = h\nu$	

Решение

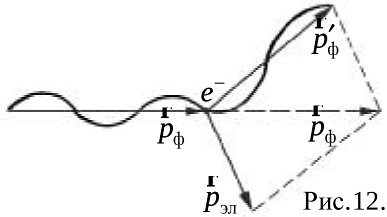

Рис.12.

Выберем систему отсчета “Лаборатория”. Заметим, что мы не должны связывать ИСО с электроном, хотя по условию задачи он до взаимодействия с фотоном находится в покое. Дело в том, что в результате взаимодействия электрон должен приобрести скорость, но в ИСО “Электрон” он и затем должен оставаться неподвижным, что было бы невозможно без введения дополнительных сил связи. Но тогда получалось бы совсем другая задача.

Изобразим процесс рассеяния фотона графически (рис. 12).

Рассматривая и электрон и фотон как корпускулы, составим для этой замкнутой системы взаимодействующих тел формулы законов сохранения и превращения энергии и импульса:

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

$$\vec{p}_ф = \vec{p}\,'_ф + \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

В формуле (1) первый член слева - энергия фотона, второй - энергия покоя неподвижного электрона в ИСО “Лаборатория”; справа первый член -новая энергия рассеянного фотона, второй - полная энергия рассеянного электрона, включающая как энергию покоя mc^2, так и кинетическую энергию его движения $E_{кин}$. В формуле (2) слева учитывается, что в исходном состоянии импульс электрона равен нулю, справа в формуле (2) стоят импульс рассеянного фотона и релятивистский импульс электрона, который он приобретет в результате взаимодействия. Только использование формул СТО позволяет полностью объяснить все особенности эффекта Комптона. Формула (2) записана в векторной форме. Преобразуем это выражение, используя теорему косинусов из элементарной геометрии:

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{h^2n^2}{c^2}+\frac{h^2(n')^2}{c^2}-2h^2\frac{n\cdot n'}{c^2}\cos q. \tag{3}$$

Формулу (1) запишем так:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=hn-hn'+mc^2.$$

Возведем ее в квадрат:

$$\frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}=h^2n^2-h^2(n')^2+m^2c^4+2hnmc^2-2hn'mc^2-2h^2nn'.$$

Из этого выражения вычтем формулу (3), умножив предварительно все ее члены на c^2. Получаем:

$$m^2c^4=m^2c^4+2hmc^2(n-n')-2h^2nn(1-\cos q).$$

После упрощения оставшегося равенства, придаем выражению следующий вид:

$$(n-n')mc^2=hnn'(1-\cos q)\ . \tag{4}$$

Учитывая, что $\frac{c}{n}=l$ и $\frac{c}{n'}=l'$, запишем (4) так:

$$(l-l')mc=2h\sin^2\frac{q}{2},$$

где использована формула

$$(1-\cos q)=2\sin^2\frac{q}{2}.$$

Таким образом, изменение длины волны излучения равно:

$$\Delta l = l' - l = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{q}{2} \quad . \qquad (5)$$

Кинетическая энергия электрона также рассчитывается на основании формул специальной теории относительности:

$$E_{кин} = E_{полн} - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2,$$

где использована формула (1).

Выразим из равенства (4) частоту рассеянного фотона

$$n' = \frac{mc^2}{mc^2 + 2hn\sin^2\frac{q}{2}}n$$

и, подставив ее в выражение для $E_{кин}$, получаем функциональную зависимость $E_{кин}$ от частоты падающего фотона:

$$E_{кин} = \frac{2(hn)^2\sin^2\frac{q}{2}}{mc^2 + 2hn\sin^2\frac{q}{2}} \quad . \qquad (6)$$

Экспериментально явление Комптона можно наблюдать с помощью камеры Вильсона. На пути электронов и на пути рассеянных фотонов появляются ионы (и электроны и фотоны ионизируют молекулы газа, заполняющего камеру Вильсона), на них как на центрах конденсируется пересыщенный пар, что делает видимым путь электронов и фотонов. Из прилагаемой таблицы видно, как хорошо экспериментальные данные согласуются с теорией, свидетельствуя об ее истинности.

q	$\Delta l_{теор}$	$\Delta l_{эксп}$
72	0,0168	0,0170
90	0,0243	0,0241
110	0,0345	0,0350
160	0,0469	0,0470
170	0,0480	0,0482

Задача №6. СТО и ядерная физика

Когда говорят, что выводы СТО подтверждены экспериментально, то имеют в виду явления и процессы, происходящие с элементарными частицами. Понятие “элементарная частица” - это историческое понятие: с развитием физики в это понятие вкладывалось новое содержание. Так, в древнем мире под элементарной частицей понималось наименьшее количество вещества, оно называлось “атомом”, что в переводе с греческого означает “неделимый”.

В XVIII-XIX вв. под элементарной частицей понималось то, что ныне мы называем молекулой. В конце X1X в. была открыта первая истинно элементарная частица - электрон. До сих пор неизвестна природа электрона, но общепризнанно, что он далее неделим. Другие позже открытые элементарные частицы (протон, нейтрон и др.) оказались сложными системами, при определенных условиях они распадаются на более простые. Вот, например, реакция распада отрицательно заряженного мю-мезона (существует и положительно заряженный мю-мезон):

$$m_{-1} = e_{-1} + n_0 + \tilde{n}_0 ,$$

где e_{-1} - электрон, n_0 и $\tilde{n}_0$ - нейтрино и анти -нейтрино.

В этой реакции выполняются законы сохранения энергии, количества движения, электрического заряда, числа лептонов (легких частиц), числа частиц и античастиц и т.д.

До сих пор не построена теория элементарных частиц. Но для описания физических процессов, происходящих с этими частицами, широко используется положения СТО. Именно это и служит экспериментальным доказательством истинности СТО.

Применим некоторые положения СТО для рассмотрения следующей задачи. **В лабораторной ИСО частица *A* (имеющая массу и импульс) сталкивается с покоящейся частицей *B*. Может ли частица *B* поглотить частицу *A*?**

Найти	$(A+B)\rightarrow X$	
Дано	m_A m_B $p_B=0$	**Решение**

ИСО задана в условии задачи - “Лаборатория”. Хотя частица В неподвижна в этой ИСО в начальный момент времени, но с ней нельзя связывать начало СО, так как после столкновения с частицей A частица B должна прийти в движение. A тело отсчета (начало системы координат) должно быть неподвижно в выбранной ИСО. Чертеж в данной задаче не имеет смысла делать.

Для решения задачи воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. До столкновения энергия системы слагалась из энергии налетающей частицы A:

$$E_A=\sqrt{m_A^2\cdot c^4+p^2c^2}$$

и энергии покоящейся частицы B:

$$E_B=m_Bc^2\,.$$

Суммарная энергия частиц A и B до столкновения равна:

$$E=E_A+E_B=\sqrt{m_A^2c^4+p^2c^2}+m_Bc^2.$$

После столкновения, в результате которого частица A (по условию задачи) будет поглощена частицей B, полная энергия последней будет:

$$E_B'=\sqrt{m_B^2c^4+p^2c^2}\,.$$

Эта формула учитывает, что масса частицы B (как и всех других элементарных частиц) является абсолютной, инвариантной величиной. Кроме того, на основании закона сохранения импульса, у частицы B, которая по предположению должна поглотить частицу A, будет тот же импульс, какой был у частицы A до столкновения (частица B до столкновения была неподвижна, ее импульс равнялся нулю).

Замкнутость системы позволяет составить равенство:

$$m_B c^2 + \sqrt{m_A^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{m_B^2 c^4 + p^2 c^2} \ .$$

Возведем обе стороны равенства в квадрат и перенесем все члены в одну сторону его, получаем:

$$2m_B c^2 \sqrt{m_A^2 c^4 + p^2 c^2} + m_A^2 c^4 = 0 \ .$$

Это равенство для реальных частиц не может выполняться, так как все его члены - положительные величины. Таким образом, сделанное в условии задачи предположение, что при столкновении с движущейся частицей *A* ранее неподвижная частица *B* поглотит частицу *A* и останется прежней частицей *B*, невозможно. Например, фотон, налетая на свободный электрон, как в эффекте Комптона, не может быть поглощен электроном. В результате столкновения фотона с неподвижным электроном возникнет фотон рассеяния и электрон отдачи .

Совсем другое дело, если в результате столкновения будут рождаться и другие элементарные частицы.

Задача №7. Столкновение релятивистских частиц

Элементарные частицы образуют особый мир - микромир. Их нельзя увидеть даже в электронный микроскоп, дающий увеличение угла зрения в миллионы раз. Ведь элементарные частицы (электроны, позитроны, мезоны, протоны, нейтроны и др.) в 10^5 раз меньше атомов, а последние во столько раз меньше размеров среднего яблока, во сколько оно меньше Земли. И все же ученным удалось проникнуть в микромир и обнаружить у элементарных частиц удивительные, иногда странные, непривычные свойства. Удалось установить время их жизни (некоторые элементарные частицы живут всего лишь 10^{-23} с, другие - “долгоживущие” исчезают, превращаясь в другие частицы, за 10^{-8} с (одна стомиллионная доля секунды!), определены массы частиц и произведена их систематизация. И все же к концу XX в. физикам не удалось создать полную теорию элементарных частиц.

Но как же физики смогли открыть множество элементарных частиц (сейчас их известно более 300!), установить их электрический заряд, массу и другие физические характеристики? Все это удалось сделать, **приводя элементарные частицы во взаимодействия**, так как только в таком случае можно выявить и количественно определить физические свойства элементарных частиц, установить их “характер”. Чтобы привести частицы во взаимодействие, их надо “столкнуть”, предварительно увеличив их скорость, энергию движения.

Читателю, очевидно, известны различные ускорительные устройства (циклотрон, бетатрон, синхротрон и т. д.), в которых используются электрические и магнитные поля. С их помощью осуществляется процесс ускорения элементарных частиц, которые затем и приводятся во взаимодействие. В последние годы широко используется метод исследования свойств элементарных частиц, когда эти частицы летят навстречу друг другу (“метод встречных пусков”). Ниже при решении задачи мы увидим преимущества этого метода.

Чтобы увидеть результат взаимодействия частиц между собой или со средой, через которую они пролетают, используются различные регистрационные устройства типа “счетчиков”, различных “камер” (камера Вильсона, ионизационная, пузырьковая, и др.), фотопластинки и т.д.

Рассмотрим процесс столкновения двух элементарных частиц на примере реально осуществляющейся реакции.

Определить энергию взаимодействия неподвижного протона с налетающим на него протоном, если энергия последнего *70 ГэВ*.

Запишем условие задачи кратко, выберем ИСО и далее будем решать задачу по общему плану.

Найти	$E_{вз}$
Дано	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,кг$ $v_{p1} = 0$ $E_{p2} = 70\,ГэВ$

Решение

Выберем ИСО “Лаборатория”, в которой находятся все необходимые приборы, с помощью которых мы не только сообщим второму протону энергию E_{p2}, но и зарегистрируем акт взаимодействия протонов между собой.

Как неоднократно указывалось ранее, в современной физике понятие ИСО расширилось до физической лаборатории, где имеется все, что необходимо для наблюдения физического процесса. В выбранной ИСО первый протон неподвижен, второй движется со скоростью v_{p2}. Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, уточним, что понимается в физике элементарных частиц под энергией взаимодействия: **принято называть энергией взаимодействия двух элементарных частиц их общую энергию в той ИСО, в которых их суммарный импульс равен нулю.**

Составим выражение для полной энергии сталкивающихся протонов в исходной ИСО "Лаборатория":

$$E = E_{0p1} + E_{p2} = mc^2 + E_{p2} .$$

При этом было учтено, что у первого протона есть только энергия покоя .

Суммарный импульс системы в векторной форме запишется так:

$$\vec{p} = \vec{p}_{10} + \vec{p}_2 = \vec{p}_2 .$$

так как первый протон неподвижен и его импульс равен нулю.

Рассматривая обе частицы в момент столкновения как одну сложную систему, составим для нее ту формулу Эйнштейна, которая является более общей, так как справедлива и для частиц, не имеющих массу, как например, фотон:

$$E = \sqrt{M^2c^4 + p^2c^2} ,$$

откуда

$$M^2c^4 = E^2 - p^2c^2 .$$

или

$$M^2c^4 = \left(E_2 - mc^2\right)^2 - \left(E_2^2 - m^2c^4\right) = 2E_2mc^2 + 2m^2c^4 = 2E_{10}E_2 + 2E_{10}^2.$$

Следовательно,

$$Mc^2 = \sqrt{2E_{10}E_2 + 2E_{10}^2} \ .$$

где M определяет суммарную массу взаимодействующих протонов.

Рассматриваемая реакция реально осуществляется на протонном ускорителе в г. Серпухове.

Так как энергия покоя протона

$$E_{10} = mc^2 = 14{,}03 \cdot 10^{-11}\ Дж = 0{,}938\ ГэВ \ ,$$

то для величины Mc^2, которую мы рассматриваем как полную энергию системы в момент столкновения, иными словами, как энергию взаимодействия, получаем :

$$Mc^2 = 11{,}54\ ГэВ.$$

Как видно из количественного результата, только малая доля энергии налетающего протона расходуется на саму реакцию взаимодействия.

Иначе обстоит дело, когда рассматривается взаимодействие частиц во встречных пучках. Покажем это с помощью элементарных расчетов, рассмотрев следующую ***задачу***.

Во встречных пучках сталкивается два электрона с энергией $E_1 = E_2 = 6\ МэВ$ *(1 МэВ=10^6эВ). Какова энергия взаимодействия этих частиц*?

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$E_{вз}$
Дано	$m_e = 0{,}51\ МэВ$ $E = 6\ МэВ$ $E_1 = E_2 = E$ $v_1 = v_2 = v$

Решение

Выберем ИСО “Центр масс”. Но в данной задаче она совпадает с ИСО “Лаборатория”, так как одинаковые частицы - электроны - движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и их центр масс неподвижен в ИСО “Лаборатория”.

Энергия взаимодействия равна энергии относительного движения электронов, если суммарный импульс системы до и после столкновения равен нулю. Энергию относительного движения мы определим по формуле:

$$E_{отн} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

где V - скорость относительного движения электронов относительно друг друга. Эту величину определим так. Выберем новую ИСО “1-й электрон”, в которой второй электрон как раз и имеет скорость V. Воспользуемся формулой теоремы сложения скоростей СТО в одномерном движении:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\,.$$

Применительно к нашей задаче $u_x = V, v = v_1, u'_x = v_2 = v$ - скорость 2-го электрона в ИСО “Лаборатория”. Тогда

$$v = \frac{Vv}{1-\frac{Vv}{c^2}}\,.$$

Разрешим это равенство относительно V, получаем

$$V = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Теперь имеем возможность рассчитать $E_{вз}$ через данные задачи

$$E_{вз} = E_{отн} = \frac{E_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Из формулы

$$E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

можно определить

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{E_1^2},$$

соответственно

$$1+\frac{v^2}{c^2} = 2-\frac{E_0^2}{E_1^2}.$$

Составим выражение для $E_{вз}$

$$E_{вз} = E_{отн} = \frac{E_0 E_1^2\left(2-\frac{E_0^2}{E_1^2}\right)}{E_0^2} \cong \frac{2E_1^2}{E_0},$$

где сделано разумное упрощение, так как $\frac{E_0^2}{E_1^2} << 1$.

Подставляя числовые данные, получаем, что на взаимодействие электронов во встречных пучках в ИСО “Лаборатория” приходится энергии

$$E_{вз} = \frac{2\cdot 36(МэВ)^2}{0{,}51\ МэВ} = 141\ МэВ.$$

Результат этой задачи показывает, как перспективен метод взаимодействия частиц на встречных пучках.

Интересен вопрос о том, в каком ускорителе можно получить тот же эффект. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть одна частица сталкивается с другой, которая неподвижна в данной ИСО. В момент столкновения образуется промежуточная частица, для которой формула Эйнштейна будет иметь вид:

$$\left(mc^2+E\right)^2=M^2c^4+p^2c^2,$$

или

$$M^2c^4=\left(mc^2+E\right)^2-p^2c^2,$$

где M - масса промежуточной частицы, E - ее энергия, p - ее импульс, а m - масса неподвижной частицы.

Преобразуем последнее соотношение:

$$M^2c^4=m^2c^4+2mc^2E+E^2-p^2c^2.$$

Но $\left(E^2-p^2c^2\right)$ равняется квадрату массы налетающей частицы, умноженной на c^4, следовательно,

$$M^2c^4=m^2c^4+2mc^2E+m^2c^4=2m^2c^4+2mc^2E.$$

Нам нужно найти такой ускоритель, который сообщает ускоряемой частице энергию, равную энергии, выделяющейся при столкновении встречных пучков. Поэтому приравняем

$$Mc^2=2E,$$

тогда

$$4E^2=2m^2c^4+2mc^2E,$$

откуда

$$E_x=\frac{4E^2-2m^2c^4}{2mc^2}=\frac{2E^2}{mc^2}-mc^2\approx\frac{2E^2}{mc^2}.$$

Если $E=70ГэВ$, $m=m_p=0{,}938ГэВ$, , то

$$E_x=10^5\ ГэВ!$$

Полученный результат означает, что ускоритель на встречных пучках эквивалентен по эффективности одиночному ускорителю с неподвижной мишенью, сообщающей частице энергию $10^5ГэВ$. Такие ускорители еще не построены...

§ 14. Релятивистское 4-х-мерное уравнение движения

Формула 2-го закона Ньютона (2.17), будучи инвариантной относительно формул преобразования Галилея, естественно, не может быть инвариантной относительно формул преобразования координат и времени Лоренца. Как же записать формулу закона движения, чтобы удовлетворить принципу относительности Эйнштейна? Из изложенного выше материала напрашивается следующее правило: обе стороны уравнения движения должны содержать 4-х-мерные векторы, квадраты которых, как мы неоднократно убеждались, инвариантны в СТО.

Будем исходить из той формы уравнения движения, которую предложил И. Ньютон:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}. \tag{14.1}$$

Лабораторное время t связано в СТО с собственным, инвариантным временем по формуле (6.9):

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{6.9}$$

а под $\vec{P}$ будем понимать инвариантный 4-х-мерный вектор импульса, причем

$$P_1 = mV_1,\ P_2 = mV_2,\quad P_3 = mV_3,\quad P_4 = mV_4,$$

m— инвариантная масса тела, а проекции 4-х-мерного вектора скорости даются формулами (9.6), (9.7):

$$V_i = \frac{u_i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},\quad i = 1,\ 2,\ 3; \qquad V_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d}{d\tau}(mV_i) = f_i, \quad i = 1,2,3,4 \tag{14.2}$$

где введены обозначения:

$$f_1 = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},\quad f_2 = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},\quad f_3 = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

а f_4 определяется ниже. В такой записи левая сторона уравнения движения уже выражена через величины, образующие инварианты.

Найдем явное выражение для четвертой компоненты 4-х-мерного вектора силы f_4. Для этого умножим все проекции 4-х-мерного вектора скорости V_i, на соответствующие проекции 4-х-мерного вектора силы и сложим эти произведения (мы получим так называемое 4-х-мерное скалярное произведение двух 4-х-мерных векторов):

$$V_1 f_1 + V_2 f_2 + V_3 f_3 + V_4 f_4 = V_1 \frac{d}{dt}(mV_1) + V_2 \frac{d}{dt}(mV_2) + V_3 \frac{d}{dt}(mV_3) +$$

$$+ V_4 \frac{d}{dt}(mV_4),$$

где использованы значения проекций 4-х-мерного вектора силы, исходя из формулы (14.2).

Легко убедиться, проведя дифференцирование, что предыдущее выражение можно записать и так:

$$(\mathbf{V}\mathbf{f}) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2\right). \qquad (14.4)$$

Но в скобках стоит 4-х-мерный инвариант, равный постоянной величине (см. формулу (9.8)), производная от которой равна нулю. Следовательно,

$$(\mathbf{V}\mathbf{f}) = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 = 0\,, \qquad (14.5)$$

откуда

$$f_4 = -\frac{V_1 f_1 + V_2 f_2 + V_3 f_3}{V_4}\,. \qquad (14.6)$$

Все величины, стоящие справа в формуле (14.6), нам известны. Подставим их значения:

$$f_4 = -\frac{u_x F_x + u_y F_y + u_z F_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot ic}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{i}{c}\frac{(\mathbf{u}\mathbf{F})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (14.7)$$

где $(\vec{u}\vec{F})$ — трехмерное скалярное произведение трехмерных векторов $\vec{u}$ и $\vec{F}$.

Итак, четвертая проекция 4-х-мерного релятивистского уравнения движения записывается в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\left(m\cdot\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{i}{c}\frac{(\vec{u}\vec{F})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (14.8)$$

После сокращения на мнимую единицу, переноса множителя c налево и перехода к лабораторному времени согласно соотношению (6.9), уравнению (14.8) можно придать вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=(\vec{u}\vec{F}). \qquad (14.9)$$

Выясним физический смысл этого уравнения. Так как величина

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

определяет энергию движущегося тела (это формула Эйнштейна (10.5)), то левая сторона (14.9) определяет изменение энергии движущегося тела за единицу времени. Справа же величина указывает, что за счет этого изменения энергии (за единицу времени) совершается работа силы F (также за единицу времени). Действительно:

$$(\vec{u}\vec{F})=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{S}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{F}\vec{S})=\frac{d}{dt}A.$$

Таким образом, четвертая проекция релятивистского 4-х-мерного уравнения движения выражает закон сохранения и превращения энергии. Если тело изолировано (или система тел замкнута), то из уравнения (14.1) тотчас же следует закон сохранения количества движения. Все же 4 проекции релятивистского уравнения движения объединяют два самостоятельных в классической физике закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения и превращения энергии в единый в СТО закон сохранения энергии-импульса. Этот факт был уже нами установлен при рассмотрении физического смысла 4-х-мерного вектора импульса.

Как и ранее введенные 4-х-мерные векторы, 4-х-мерный вектор силы $\vec{f}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ при переходе от одной ИСО к другой преобразуется по формулам Лоренца:

$$f_1' = \frac{f_1 + ibf_4}{\sqrt{1-b^2}}, \quad f_2' = f_2, \quad f_3' = f_3, \quad f_4' = \frac{f_4 - ibf_1}{\sqrt{1-b^2}}, \tag{14.10}$$

где $b = \frac{v}{c}$, v — относительная скорость движения ИСО L' относительно ИСО L.

В качестве примера использования этих формул рассмотрим частный случай, когда тело покоится в ИСО L, т.е. u=0. Тогда, учитывая формулы (14.3), тотчас же получаем:

$$f_1 = F_x, \quad f_2 = F_y, \quad f_3 = F_z, \quad f_4 = 0.$$

С другой стороны, аналогично формулам (14.3) можно написать формулы для компонент 4-х-мерного вектора силы в ИСО L':

$$f_1' = \frac{F'_{x'}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}, \quad f_2' = \frac{F'_{y'}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}, \quad f_3' = \frac{F'_{z'}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}, \quad f_4' = \frac{i}{c}\frac{(\vec{F}\vec{u})}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}. \tag{14.11}$$

Составляя формулы (14.10), получаем (с учетом, что в ИСО L' тело движется со скоростью u'=—v):

$$F'_{x'} / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = F_x / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

откуда

$$F'_{x'} = F_x,$$

$$\frac{F'_{y'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_y,$$

т.к. $u=0$.

Аналогично

$$\frac{F'_{z'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_z \quad . \qquad (14.12)$$

Составим

$$f'_4 = -\frac{i(\vec{F}\vec{v})}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{i(F_x v)}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где учтено, что $u''=-v$ и имеет лишь одну проекцию на ось $Q'x'$ (при этом $F'_{x'} = F_x$). Тогда четвертая формула Лоренца для четвертой проекции 4-х-мерного вектора силы превращается в тождество.

Итак, релятивистское четырехмерное уравнение движения $\frac{d}{dt}P_i = f_i$ инвариантно относительно формул преобразования координат и времени Лоренца. Это и есть то, что утверждает принцип относительности Эйнштейна.

§15. Релятивистское трехмерное уравнение движения

Рассмотрим релятивистское уравнение движения в лабораторной СО (см. формулу (14.1)). Учтем при этом, что три пространственные компоненты релятивистского импульса определяются выражением

$$\vec{P} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{(см. 10.2).}$$

Тогда уравнение (14.1) запишется так:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\vec{F}\,, \qquad (15.1)$$

где m — инвариантная масса.

Раскроем производную по времени в левой части уравнения (15.1) как производную от произведения:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\frac{d}{dt}\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (15.2)$$

Преобразуем второе слагаемое, умножив и разделив его предварительно на c^2:

$$\frac{\vec{u}}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{u}\right),$$

где использована формула (14.9).

После элементарных перестановок уравнение (15.1) принимает вид:

$$m\frac{d\vec{u}}{dt}=\left[\vec{F}-\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{u}\right)\right]\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \qquad (15.3)$$

Это уравнение является общей формой записи релятивистского уравнения движения в трехмерной форме. Иными словами, *это есть формула 2-го закона Ньютона в СТО*. Обратим внимание на существенно новое, что содержится в уравнении (15.3), по сравнению с классическим уравнением 2-го закона Ньютона. По своему смыслу производная $\frac{d\vec{u}}{dt}$ есть ускорение. Но тогда из уравнения (15.3) следует, что ускорение в релятивистском движении не всегда совпадает по направлению с вектором силы (как это требуется в классической механике), а зависит также от направлсния скорости (в формуле (15.3) справа стоит векторная сумма 2-х векторов $\vec{F}$ и

$a \cdot \vec{u}$, где $a = \frac{1}{c^2}\left(\vec{F}\vec{u}\right)$, которые в общем случае не параллельны.

Рассмотрим два простейших случая расположения векторов $\vec{F}$ и $\vec{u}$ (эти случаи встречаются при движении заряженных частиц в электрическом или магнитном полях).

1. Пусть вектор силы $\vec{F}$ направлен перпендикулярно вектору скорости $\vec{u}$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно нулю и уравнение движения принимает вид:

$$m_{\perp} \cdot \vec{a}_{кл} = \vec{F}\ , \tag{15.4}$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$m_{\perp} = \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

Эту величину иногда называют “поперечной массой”, что символически указывает на относительное расположение векторов $\vec{F}$ *и* $\vec{u}$ в этой задаче. *Никакого физического смысла это название не содержит.*

2. Пусть векторы $\vec{F}$ и $\vec{u}$ располагаются параллельно друг другу. Тогда второй член справа в уравнении движения (15.3) можно преобразовать так:

$$\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{u}\right) = \frac{\vec{u}}{c^2} F \cdot u = \frac{u}{c^2}\vec{F}u = \frac{u^2}{c^2}\vec{F}.$$

Знак вектора перенесен с величины u на F, что возможно в силу параллельности этих векторов. Уравнение движения (15.3) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)}\vec{a}_{кл} = \vec{F}\ .$$

Если ввести обозначение

$$m\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = m_{\uparrow\uparrow}\,,$$

то внешне уравнение движения снова принимает классическую форму (в этом и смысл введения величины $m_{\uparrow\uparrow}$):

$$m_{\uparrow\uparrow}\vec{a}_{кл} = \vec{F}\ .$$

Величину $m_{\uparrow\uparrow}$ иногда в литературе называют “продольной массой”, но как и “поперечная масса”, “продольная масса” не должна пониматься как физическая величина. *Физический смысл имеет только инвариантная масса m.*

Определим закон изменения скорости тела для этого случая. Запишем уравнение движения так (знак вектора опустим в силу одномерности движения):

$$\frac{m}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} = F \qquad \text{или} \qquad \frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = a_0 dt, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{F}{m}.$$

Интегрирование приводит к следующему результату:

$$\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = a_0 t, \quad \text{, откуда} \quad u = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}.$$

Легко проверить, что при $t \to \infty$ скорость будет стремиться к предельному значению, равному скорости света в вакууме c, как и должно быть в СТО.

§16. Инвариантность уравнений электродинамики

Первый постулат Эйнштейна утверждает, что все законы природы одинаковы во всех ИСО. Выше мы показали, как требуется изменить классическое уравнение движения в механике, чтобы оно оказалось инвариантным относительно формул пре-