Раздел 1.

Задачи по специальной теории относительности

1. Выбор различных систем отсчета

Принцип относительности — один из основных принципов современной физики, позволяющий увидеть единство физики как науки о природе. Для выявления глубокого физического и философского содержания этого принципа необходимо в первую очередь понять роль и широко использовать систему отсчета, выступающей как физическая лаборатория.

В силу равноправия всех ИСО, исследователю предоставляется возможность выбора любой ИСО. Однако только интуиция, приобретаемая при многократных тренировках при решении задач, подскажет ту ИСО, в которой наиболее просто физически и математически предстанет изучаемый процесс. В дальнейшем мы постоянно будем работать с различными ИСО, поэтому будет естественным, если на ряде примеров покажем возможности в выборе ИСО при решении нескольких кинематических задач.

Будем следовать следующему плану решения: после анализа условия задачи и краткой записи, выбираем ту ИСО, в которой, как нам кажется (ведь все ИСО равноправны!), решение будет физически более ясным и математически более рациональным; в выбранной ИСО строим чертеж (рисунок или схему), проводим аналитическое решение; в конечное выражение для искомой величины подставляем численные значения с наименованиями. После проверки размерности ответа, находим его численное значение и, при надобности, анализируем ответ. Такой план, в принципе, пригоден для решения задач по всем разделам физики.

Задача № 1

Лодочник, проплывая под мостом против течения, потерял запасное весло. Через некоторое время он обнаружил пропажу, развернул лодку и через час в трех километрах ниже моста догнал весло. Определить скорость воды.

Найти	$v_в$
Дано	$t = 1ч$ $l = 3км$

Решение

1 вариант

В большинстве задач, как и в данной, условие формулируется в СО "Земля". Это методически не оправдано, так как в определенной степени "абсолютизирует", выделяет в сознании эту СО. Но последуем за автором задачи и выберем эту систему отсчета в качестве рабочей СО. Итак, задача будет решаться в ИСО "Земля". Сделаем в этой ИСО чертеж, соответствующий условию задачи (рис. 1).

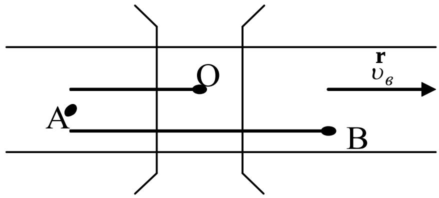

Рис.1.

Введем вспомогательное время t', которое лодочник потратит для прохождения пути ОА, в конце которого он обнаруживает пропажу весла. Можно составить следующие три равенства, учитывающие, согласно ТСС, что скорость лодки при движении против течения равна $(v - v_в)$, при движении по течению $(v + v_в)$, где v — скорость лодки в стоячей воде, $v_в$ — скорость течения воды:

$OB = v_в(t + t')$ — путь весла,

$OA = (v - v_в)t'$ — путь лодки до поворота,

$AB = (v + v_в)\ t$ — путь лодки от поворота до встречи с веслом.

Из чертежа видно, что $AB = OA + OB$, или $(v + v_в)t = (v - v_в)t' + v_в(t + t')$. После раскрытия скобок и сокращения подобных членов с разными знаками, получаем, что $t = t'$.

Таким образом, полное время движения весла (вместе с водой) равно $T = t + t' = 2t$.

За это время весло проплыло со скоростью воды расстояние $l = v_в T$,

откуда $v_в = \dfrac{l}{T} = \dfrac{3km}{2ч} = 1{,}5\ km/ч.$

Несмотря на кажущуюся простоту решения, чрезвычайно трудным моментом его является введение вспомогательного времени t', числовое значение которого не дано в условии задачи и не известно, как его найти. Рассмотрим другой вариант решения задачи, выбрав другую ИСО.

2 вариант

Поставим перед собой вопрос: нет ли такой ИСО, в которой задача решалась бы более физично, без введения вспомогательного времени t', с большим осмыслением физических понятий, встречающихся в задаче? Например, если взять ИСО “Вода” (мы будем давать название ИСО по тому объекту, с которым можно связать тело отсчета данной ИСО), то в этой СО вода неподвижна, неподвижно и весло, и лишь лодка удаляется и приближается к веслу. Причем, это движение лодки происходит в стоячей (!) воде. Поэтому потребуется одно и то же время для удаления и приближения к веслу. А так как длительность (время) в классической физике является абсолютной величиной, то и в ИСО “Вода” на возвращение лодки к веслу (как и в ИСО “Земля”) потребуется 1 час. Всего же лодка в движении будет два часа (1 час “туда” и 1 час “обратно”). Столько же времени плыло весло вместе с водой относительно берега и при этом проплыло (со скоростью воды) 3 км. Следовательно, скорость весла (и воды) равна

$$v_в = \frac{l}{2t} = \frac{3км}{2ч} = 1{,}5\ км/ч$$

При решении задачи по второму варианту выбора ИСО нам пришлось исходить из таких важных для классической физики представлений, как абсолютность времени, длины и относительность скорости, инвариантность самого события, утвердиться в равноправии ИСО и существенно упростить математические расчеты. Нет сомнения, что тот читатель, который **ищет в задачах физику**, выберет 2-ой вариант решения .

Задача №2.

Начальные положения и векторы скоростей двух кораблей (самолетов, людей и т. д.) заданы графически. Корабли движутся равномерно. Каким будет наименьшее расстояние между ними?

Предоставляем читателю самостоятельно решить эту задачу в ИСО “Берег”. При этом придется воспользоваться так называемой “теоремой косинусов”, введя вспомогательное время движения. Затем минимизируя корни получающегося квадратного уравнения, найдем искомое расстояние. Решение очень сложное, больше математическое, чем физическое. Поэтому воспользуемся возможностью выбора другой равноправной (по результатам) ИСО.

Свяжем начало другой ИСО с одним из кораблей, например, с первым. Тогда в ИСО “1-й корабль” этот корабль будет неподвижным, а второй будет двигаться со скоростью $\vec{v} = \bar{v}_2 - \vec{v}_1$, которая определяется по ТСС. В СО “1-й корабль” второй корабль будет двигаться по прямой ВД (рис.2). Теперь не представляет труда определить кратчайшее расстояние между кораблями: оно равно

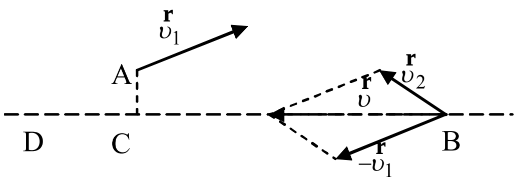

Рис.2.

длине перпендикуляра АС, опущенного из местоположения 1-го корабля (т. А) на направление движения 2-го корабля. А так как длина в классической физике является величиной абсолютной, то и в ИСО “Берег” это расстояние между кораблями будет наименьшим. Если чертеж построен в определенном масштабе, то такое решение может дать не только качественный, но и количественный ответ.

Задача №3

Два велосипедиста едут навстречу друг другу. Один, имея скорость 18 км/ч, поднимается в гору с ускорением —20см/с², другой, имея скорость 5,4 км/ч, спускается с горы с ускорением 0,2 м/с². Через сколько времени они встретятся, и какое расстояние проедет каждый до встречи, если между ними в начальный момент было 130 м?

Найти	t, l_1, l_2
Дано	$a_1 = -20\ см/с^2$, $a_2 = 0{,}2\ см/с^2$, $v_1 = 18 км/ч$, $v_2 = 5{,}4 км/ч$, $l = 130 м$

Решение

“Стандартное” решение можно провести в ИСО “Земля”. Нужно составить уравнения движения для каждого велосипедиста, учесть, что $l = l_1 + l_2$, и решить квадратное уравнение относительно t, затем рассчитать l_1 и l_2.

Но физически интереснее рассмотреть решение в СО “1-й велосипедист”. И хотя сам 1-й велосипедист движется ускоренно в ИСО “Земля”, но в своей СО он неподвижен. Второй же велосипедист в этой СО движется равномерно, так как по условию задачи его ускорение равно и одно направленно с ускорением 1-го велосипедиста в СО “Земля”. Таким образом, благодаря выбору СО, удалось более сложное равнопеременное движение велосипедистов свести к несравненно более простому равномерному движению. В СО “1-й велосипедист” второй велосипедист движется со скоростью $(v_1 + v_2)$, что следует из ТСС. Велосипедистов разделяет расстояние в 130 м (длина — инвариантная величина!). Этот путь 2-й велосипедист пройдет за время:

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2}.$$

Но время в классической физике — инвариант, следовательно, столько же времени оба велосипедиста будут двигаться до встречи и в СО “Земля”. Мы нашли основной ответ задачи, не решая квадратного уравнения. А теперь, зная время движения любого велосипедиста, можно определить пройденный ими путь, используя уравнение движения велосипедистов в СО “Земля”. Например, для 1-го велосипедиста

$$l_1 = v_1 t - \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Элементарный расчет дает следующие числовые данные:

$$t = 20\ с,\quad l_1 = 60\ м,\quad l_2 = 70\ м.$$

Обратим внимание на то, что к подобной задаче сводятся движения тел, имеющих одно и то же ускорение, например, задача о свободном движении 2-/х тел в поле тяжести Земли. При этом не обязательно, чтобы тела двигались навстречу друг другу, как в данной задаче.

Задача №4

Как быстрее и с наименьшей затратой энергии переправиться на лодке через реку?

Найти	$\angle\alpha$
Дано	$v_{лодки}$
	$v_{воды}$

Решение

Снова (как и в предыдущей задаче) предоставим читателю решить эту задачу в “стандартной” СО — “Земля”. Мы же выберем в качестве ИСО систему отсчета “Вода”. В этой ИСО движение лодки будет происходить в стоячей воде и нам не нужно учитывать влияние течения воды. Очевидно, что в ИСО “Вода” продольную ось лодки надо направить перпендикулярно берегам, тогда путь лодки от берега к берегу будет наикратчайшим (рис.3).

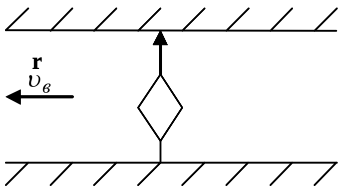

Рис.3.

Таким образом, мы определили главное: чтобы путь лодки был наикратчайшим, нужно, чтобы она перемещалась перпендикулярно берегам. И это остается в силе при переходе к любой другой ИСО, в том числе и к ИСО “Земля”. Но следует обратить внимание на то, что траектория движения лодки в различных ИСО будет разная. Дело в том, что траектория тела обусловлена начальными условиями. Поэтому она имеет относительный характер. Так, в ИСО “Вода” траектория лодки располагается перпендикулярно берегам, в ИСО “Земля” траектория лодки составит острый угол с перпендикуляром к берегам, что обусловлено сносом лодки течением воды. Однако и та и другая траектории лодки – реальны, настоящие, но относятся к разным СО.

Разобранные нами задачи убеждают, как важно правильно выбрать систему отсчета, и что это вообще нужно делать всегда при решении любой физической задачи. Удачно выбранная ИСО позволяет глубже вскрыть физическое содержание вопроса, во многих случаях упростить математическое описание наблюдаемой картины. Процесс осмысления условия задачи при выборе ИСО приучает анализировать, и тем самым формируется научное представление об окружающей действительности. Для дальнейшего изложения очень важно понимать, что относительность описания физических явлений и свойств материальных тел не находится в противоречии с объективностью и, следовательно, с реальностью этих явлений и свойств. Сами явления происходят в любой ИСО, так как они инвариантны.

2.Задачи по кинематике СТО

Нет лучшего способа проверить знание теории, чем решение задач. Все рассматриваемые ниже задачи сопровождаются кратким текстом решения. Но желательно, чтобы читатель сначала наметил свое решение, а затем сопоставил его с приводимым текстом.

Задача № 1.

У писателя С. Я. Маршака есть такое стихотворение, разобраться в котором можно только на основе СТО.

Честь друзьям, вперед смотрящим,
Звездолетчикам бесстрашным,
Что зовем мы настоящим —
Вы считаете вчерашним.

Обратив же в час свободный
Взор к Земле, к друзьям, вас ждущим,
Наше здешнее “сегодня”
Вы считаете грядущим!

Прокомментируйте стихотворение, исходя из относительности временных промежутков.

Решение

В первом четверостишье поэт рассматривает полет звездолетчиков (сейчас мы их называем космонавтами), находясь в ИСО “Земля”. Моменту времени на Земле t_0 на корабле, который движется относительно Земли, будет соответствовать момент времени

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

что больше t_0. Поэтому у космонавтов, **с точки зрения землян**, пройдет больше времени и то, что для нас (землян) "настоящее", например, момент окончания составления первого четверостишья, для них — "вчерашнее".

Во втором четверостишье собственным временем считается время, отсчитываемое по корабельным часам t_0. . **С точки зрения космонавтов** на Земле этому моменту t_0 будет соответствовать момент времени

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{что больше } t_0.$$

Это и означает, что наше (земное) "сейчас", с точки зрения космонавтов, наступит позже.

Примечание. При решении задач на относительность временных промежутков нужно всегда помнить, что часы в каждой ИСО идут совершенно одинаково (системы отсчета совершенно равноправны!), **но с точки зрения наблюдателя**, мимо которого перемещается другая ИСО, в последней "пройдет" больший промежуток времени . Именно так надо понимать относительность временных промежутков.

Задача № 2

Через помещение, ширина которого l_0, пролетает стрела, влетев в окно и вылетев через дверь, расположенную напротив окна. Собственная длина стрелы также l_0. Прокомментировать процесс полета стрелы с т. з. двух наблюдателей, один из которых находится в ИСО "Комната", другой — в ИСО "Стрела", т. е. летит вместе со стрелой.

Решение

Для наблюдателя, находящегося в ИСО "Комната", размеры летящей стрелы меньше ширины комнаты $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Поэтому он зафиксирует одновременное нахождение концов стрелы в помещении. С т. з. наблюдателя, находящегося в ИСО “Стрела”, ширина комнаты меньше размеров стрелы и ее концы не могут одновременно находиться в помещении. “Парадокс” стрелы разрешается на основании относительности одновременности: то, что одновременно в одной ИСО (одновременное нахождение концов стрелы в помещении), не одновременно для другого наблюдателя, находящегося в движущейся ИСО. Сам факт пролета стрелы через помещение будут наблюдать во всех ИСО (в ИСО “Стрела” комната “пролетает” мимо стрелы, но это равноценно с т. з. принципа относительности). Эта задача позволяет нам еще раз утвердить объективность, инвариантность любого физического события или процесса.

Задача № 3

В § 6) была рассмотрена задача о жизни мю-мезона. На основании относительности временных промежутков было объяснено (в ИСО “Земля”), как за малое собственное время жизни $10^{-6}\,c$ мезон может преодолеть расстояние в десятки километров. Читателю предоставлялась возможность самостоятельно объяснить этот процесс с т. з. наблюдателя, связанного с мезоном. Предлагаемое ниже решение может служить проверкой правильности данного читателем решения.*

Решение

В ИСО “Мезон” сама частица неподвижна и ее собственное время жизни порядка 10^{-6} с. Даже двигаясь со скоростью света, элементарная частица смогла бы пролететь всего лишь 300 метров! И все же встреча мезона с Землей должна состояться и в ИСО “Мезон” — событие инвариантно! Обратим внимание на то, что в ИСО “Мезон” движущейся является Земля, она “падает” на мезон. Поэтому для наблюдателя, находящегося в ИСО “Мезон”, Земле нужно пролететь не десятки километров, а согласно формуле

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

т.е. во столько же раз меньше, во сколько собственное время жизни мезона в ИСО “Мезон” меньше его времени жизни в ИСО“Земля”. В результате за меньшее время (за собственное время жизни мезона) Земля “может

*) См.учебное пособие автора “Теория относительности” Псков, изд.ПГПУ, 2005г.,с.46-47; http://rozman2.narod.ru

преодолеть" меньшее расстояние, разделяющее ее и мезон в ИСО "Мезон".

Задача №4

Показать, что объемная плотность зарядов больше в той ИСО, относительно которой заряды движутся.

Решение

Еще в XIX в. М. Фарадеем было доказано, что алгебраическая сумма зарядов замкнутой системы есть величина постоянная (закон сохранения электрического заряда). Но в задаче речь идет об объемной плотности электрических зарядов, которая, как мы покажем ниже, является в СТО относительной величиной. Действительно, по определению средняя объемная плотность зарядов равна

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

где Δq заряд, находящийся в объеме ΔV. Но объем тела есть величина относительная, и он меньше в той ИСО, относительно которой тело движется.

тогда $$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \rho_0,$$

что и требовалось доказать.

Задача № 5

В ИСО L из пунктов A и B, расстояние между которыми lo, одновременно стартуют два космических корабля навстречу друг другу со скоростями, соответственно равными u и 2u. Определить, сколько времени пройдет до их встречи с точки зрения земного наблюдателя .

Запишем задачу кратко (предыдущие задачи были качественные).

Найти	$\Delta t_{01}, \Delta t_{02}$
Дано	l_0 $v_1 = u,$ $v_2 = 2u$

Решение

Следуя условию задачи, которое дано в ИСО "Земля", выберем ее за ИСО L. Сделаем чертеж в этой ИСО:

Рис. 4

Общая формула, связывающая собственное время движения кораблей (которое нам надо определить) с земным временем, запишется так

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где v — скорость движения каждого корабля относительно Земли, она разная у кораблей.

По условию задачи в ИСО "Земля" корабли должны до встречи пролететь общее расстояние l_0, которое можно разделить на два участка: $l_1 = u\cdot\Delta t$ и $l_2 = 2u\cdot\Delta t$,

где учтено, что время движения обоих кораблей до встречи одинаково.

Далее, учтем, что $l_0 = l_1 + l_2$.

Из этих равенств определяем время движения кораблей в ИСО "Земля": $\Delta t = \frac{l_0}{3u}$. Используя общую формулу для относительности временных промежутков, рассчитываем Δt_{01} и Δt_{02}:

$$\Delta t_{01} = \frac{l_0}{3u}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}; \qquad \Delta t_{02} = \frac{l_0}{3u}\sqrt{1-\frac{4u^2}{c^2}}.$$

Обратим внимание на то, что Δt_{01} и Δt_{02} - определяют промежутки времени, которые пройдут до встречи кораблей **с точки зрения земного наблюдателя**. На кораблях же ход часов такой же, как и на земле: собственное время движения кораблей есть величина инвариантная и равна (в нашем случае) $\Delta t_0 = \frac{l_0}{3u}$.

Задача № 6

Рассмотрим задачу, получившую в литературе название "парадокс близнецов". Суть ее в следующем. Один из близнецов находится на Земле, второй совершает путешествие на космическом *корабле. Утверждается, что когда второй близнец возвратится на Землю, он обнаружит новое поколение людей, так как по земным часам пройдет больше времени, чем по его “собственным часам”.*

Все это действительно когда-нибудь произойдет, но предсказывает это не специальная, а общая теория относительности, построенная А. Эйнштейном в 1916 году. Дело в том, что СТО рассматривает только ИСО, а из 2-х рассматриваемых в задаче систем отсчета “Земля” и “Корабль”, одна (“Корабль”) заведомо не инерциальная: чтобы возвратиться на Землю, космонавту придется двигаться с ускорением (чтобы изменить направление движения), а поэтому рассуждения СТО на этом участке движения об относительности временных промежутков непригодны. Именно в общей теории относительности рассматриваются не инерциальные СО и показывается абсолютное замедление хода времени в них. Все попытки на основе СТО объяснить парадокс близнецов содержат принципиальную неточность: разворот корабля считается мгновенным, а это неверно.

Задача №7 Эффект Доплера

Этот эффект наблюдается как в оптике, так и в акустике и заключается в изменении длины (частоты) волны, наблюдаемом при движении источника волн относительно их приемника. Для распространения звуковых волн обязательно требуется вещественная среда. Пока в оптике использовали модель эфира как среды, в которой возникают и распространяются электромагнитные колебания, теория эффекта Доплера в оптике строилась по аналогии с теорией этого эффекта в акустике. Однако, отказ в СТО от гипотетического эфира как носителя электромагнитных колебаний, потребовал построения теории эффекта Доплера в оптике на основе постулатов Эйнштейна.

Мы построим эту теорию, исходя из свойств 4-мерного вектора энергии-импульса применительно к фотону. Нам потребуется несколько преобразовать выражение для импульса фотона, введя новый $4^{-х}$-мерный волновой вектор $\vec{k}$. Выразим модуль вектора импульса и энергии фотона так:

$$\begin{aligned} p &= \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu}{c}\cdot\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\nu}{c} = \hbar\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar\cdot k; \\ E &= h\nu = h\nu\cdot\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}\cdot 2\pi\nu = \hbar\cdot\omega, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где $\hbar$ (аш с чертой) тоже называется постоянной Планка.

В трехмерном пространстве волновой вектор определяет направление распространения фронта волны. Определим компоненты $4^{-х}$-мерного волнового вектора так:

$$p_1 = \hbar k_1; \quad p_2 = \hbar k_2; \quad p_3 = \hbar k_3; \quad p_4 = \frac{i}{c}E = \frac{i}{c}\hbar\omega = \hbar k_4. \qquad (11.2)$$

Упростим задачу. Пусть свет распространяется в плоскости x'O'y' ИСО *L*", имея частоту $\omega' = \omega_0$, источник волн движется вместе с ИСО *L*", т. е. ω_0 есть собственная частота колебаний. Если волновой вектор составляет некоторый угол с осями координат, то для проекций волнового вектора можно написать следующие очевидные равенства:

в ИСО *L*: $\quad k_1 = k\cos\varphi; \; k_2 = k\sin\varphi; \quad k_3 = 0; \quad k_4 = \frac{i}{c}\omega;$

в ИСО *L*': $\quad k_1' = k'\cos\varphi'; \quad k_2' = k'\sin\varphi'; \quad k_3' = 0; \quad k_4' = \frac{i}{c}\omega',$

где φ, φ' — углы, которые волновой вектор составляет с осями координат *Ox* и *O'x*'.

Составим четвертую формулу Лоренца для преобразования четвертой компоненты 4-х-мерного волнового вектора:

$$k_4' = \frac{k_4 - i\frac{v}{c}k_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (11.3)$$

или, учитывая предыдущие соотношения для компонент 4-х-мерного волнового вектора, получаем:

$$i\frac{\omega'}{c} = \frac{i\frac{\omega}{c} - i\frac{v}{c}\cdot\frac{\omega}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

После сокращения на $\frac{i}{c}$ и разрешения относительно частоты ω, формула принимает вид:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi} = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}. \tag{11.4}$$

На основании принципа соответствия при $\frac{v}{c} << 1$ формула (11.4) переходит в формулу классического эффекта Доплера

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi} \approx \omega_0\left(1+\frac{v}{c}\cos\varphi\right), \tag{11.5}$$

где использована известная нам формула приближенного деления .

Рассмотрим частные случаи **классического эффекта Доплера.**

1) Пусть $\varphi = 0$, т. е. источник волн приближается к наблюдателю, волновой вектор совпадает с направлением оси Ox. В этом случае

$$\omega = \omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

т. е. частота воспринимаемого сигнала возрастает.

2) Пусть $\varphi = \pi$, т. е. источник волн удаляется от наблюдателя. В этом случае

$$\omega = \omega_0\left(1-\frac{v}{c}\right),$$

т. е. неподвижный наблюдатель будет воспринимать сигнал с меньшей частотой.

3) Если движение источника происходит так, что сигнал идет к наблюдателю под углом $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\omega = \omega_0$,т. е. частота воспринимаемого сигнала не изменяется.

Проведем теперь аналогичный анализ с формулой (11.4), основанной на положениях СТО.

1) Пусть $\varphi = 0$, тогда

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}. \qquad (11.6)$$

Как и в классическом случае, частота изменяется, но закон изменения другой.

2) Если $\varphi = \pi$, то

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}, \qquad (11.7)$$

т. е. снова получаем иной закон изменения частоты. Однако, используя формулу приближенного вычисления, мы снова можем получить классические выражения. Опыт дает лучшее совпадение с формулами (11.6) и (11.7).

3) Но особый интерес представляет анализ случая, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. . Классическая теория приводила к неизменности частоты. В релятивистском случае получается принципиально другой результат

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ . \qquad (11.8)$$

Этот эффект получил название поперечного эффекта Доплера и в 1938 году был экспериментально обнаружен при наблюдении излучения каналовых лучей (потока атомов водорода), при наблюдении в направлении, перпендикулярном их движению. Опыт и теория совпали между собой, что явилось. еще одним важным подтверждением положений СТО. Так как между частотой и периодом имеется непосредственная связь: $\nu = \frac{1}{T}$, то эффект Доплера можно рассматривать как эффект, подтверждающий относительность временных промежутков.

Эффект Доплера нашел приложение в астрофизических исследованиях. Наблюдение излучения далеких галактик показало, что длины волн их спектра излучения смещены в красную часть, явление получило название “красного смещения” и объясняется релятивистским эффектом Доплера: далекие звезды удаляются от нас. Это открытие легло в основу гипотезы "расширяющейся Вселенной". В астрономии эффект Доплера учитывается при определении лучевых скоростей движения небесных тел, используется он и в спектроскопии, в радиолокации и т. д.

3.Задачи по динамике СТО

Рассмотрим решение ряда типичных задач на формулу Эйнштейна и следствия, вытекающие из нее.

Задача № 1

На сколько увеличится масса 1 кг воды при нагревании ее от 0°С до 100° С?

Найти:	Δm
Дано:	$m = 1кг$
	$\Delta t = 100^0 C$
	$c = 3 \cdot 10^8 м/с$
	$c_p = 4{,}2кДж/кг \cdot K$

Решение

Выберем такую ИСО, в которой вода была бы неподвижна, это избавит нас от необходимости учитывать дополнительную кинетическую энергию воды. Назовем избранную ИСО "Лаборатория".

Из формулы Эйнштейна $E_0=mc^2$ непосредственно следует, что если энергия тела увеличивается на ΔE (в нашем случае внутренняя энергия воды увеличивается за счет притока энергии из-за процесса, который мы называем "нагреванием"), то увеличивается и ее масса на величину $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$. (Внимание! Величина Δm в данной задаче не является дефектом массы, а лишь определяет изменение массы тела в результате нагревания.)

Увеличение внутренней энергии воды можно определить по формуле: $\Delta E = mc_p\Delta t$. Таким образом

$$\Delta m = \frac{mc_p\Delta t}{c^2} = 4{,}7 \cdot 10^{-12} kг$$

Конечно, изменение массы воды оказалось бесконечно малым. Но если сравнить эту величину с массой электрона $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} кг$, то величина Δm будет уже представляться бесконечно большой, т. к. $\frac{\Delta m}{m_e} \approx 10^{18}$! Здесь мы убеждаемся в том, что в физике не имеет смысла говорить “малая” или “большая” величина, не указывая ориентир, по отношению к которому данная величина “малая” или “большая”.

Задача № 2

Пружину с коэффициентом жесткости к=6.10[5] Н/м сжали на 1 см. Каков прирост массы пружины?

Найти	Δm
Дано	$k = 10^5\, H/м$ $\Delta x = 0{,}01 м$ $E = \dfrac{k^2(\Delta x)^2}{2}$

Решение

Как и в предыдущей задаче, выберем ИСО “Лаборатория”.

Изменение энергии упруго деформированной пружины можно рассчитать по формуле:

$$\Delta E = \frac{k(\Delta x)^2}{2}.$$

С другой стороны, это изменение энергии связано с изменением массы пружины по формуле:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получаем, что

$$\Delta m = \frac{k(\Delta x)^2}{2 \cdot c^2} = 5 \cdot 10^{-17}\, кг.$$

В связи с этой задачей, читателю предоставляется возможность ответить на следующие качественные вопросы: куда девается дополнительная энергия сжатой пружины из железа после растворения ее в кислоте? Выделяется ли при сгорании дров, поднятых на 2-й этаж, та дополнительная энергия, которая сообщается им при поднятии на высоту 2-го этажа?

Задача № 3

Определить энергию связи ядра атома гелия, состоящего из двух протонов и двух нейтронов.

Найти	U
Дано	$M_{He} = 4.00390 а.е.м.$ $M_H = 1.008123 а.е.м.$ $M_n = 1.00893 а.е.м.$ $p = 2; \quad n = 2$

Решение.

Чтобы исключить из рассмотрения всякие другие виды энергии, кроме энергии связи, выберем систему отсчета, связанную с самим ядром атома гелия.

По определению, дефект массы равен:

$$\Delta m = 2M_H + 2M_n - M_{He}.$$

При этом массы электронов, входящих в массы атомов водорода и гелия, автоматически исключаются. Учитывая, что одна атомная единица массы (а. е. м.) равна $1{,}66.10^{-24}$ г, получаем:

$\Delta m = 4{,}98 \cdot 10^{-29}$ кг.

По определению, энергия связи равна:

$|U| = \Delta m\, c^2 = 44{,}82 \cdot 10^{-13}$ Дж = 28 МэВ.

Известно, что энергия химической связи в молекуле воды порядка 6 эВ. Сравнивая эту величину с энергией связи нуклонов в ядре атома гелия, понимаем, почему атомные ядра прочны и существуют миллиарды лет, в то время как некоторые химические соединения могут быть разрушены или нагреванием, или освещением.

Задача № 4

Рассчитать энергетический выход в реакции синтеза тяжелого водорода (дейтерия) и сверхтяжелого водорода (трития) с образованием ядра атома гелия и нейтрона.

Найти	$\lvert U \rvert$
Дано	$M_H^{\ 2}$=2,014708 а. е. м. $M_H^{\ 3}$=3,01700 а. е. м. $M_{He}^{\ 4}$ =4,00390 а. е. м. M_n= 1,00893 а. е. м.

Решение

Будем рассматривать процесс синтеза в ИСО “Лаборатория”.

Реакция синтеза протекает так:

$$H_1^2 + H_1^3 \to He_2^4 + n_0^1.$$

Для дефекта массы получаем следующую величину

$\Delta m = M_{H_1^2} + M_{H_1^3} - M_{He_2^4} - M_{n_0^1} = 0{,}0189$ а. е. м. $= 3{,}0 \cdot 10^{-29}$ кг.

Следовательно, высвобождающаяся энергия (в форме кинетической

энергии разлетающихся He и нейтрона) равна
$|U| = 27 \cdot 10^{-13}$ Дж = 17 МэВ.

Термоядерные реакции сулят человечеству безграничное количество энергии. Трудность осуществления регулируемой термоядерной реакции связана, в первую очередь, с необходимостью преодолеть кулоновское отталкивание одноименно заряженных ядер водорода и трития. Именно для преодоления этого отталкивания плазму из этих ядер нагревают до десятков миллионов градусов, что позволяет за счет кинетической энергии частиц плазмы совершить работу против кулоновских сил отталкивания. Но у регулируемого синтеза легких элементов есть и другие трудности, преодолеть которые пока не удается.

Задача №5 Эффект Комптона

Одним из положений электродинамической картины мира, построение которой завершилось к началу XX в., (после возникновения специальной теории относительности), было утверждение, что материя существует в двух видах: в виде вещества и в виде электромагнитного поля. Вещественные тела состоят из непроницаемых, локализованных в пространстве частиц (атомов, молекул, ионов, электронов). Полевое состояние материи (материальность электромагнитного поля утвердила в 1905 г. специальная теория относительности) обладает характерным для этого вида материи свойством суперпозиции, т.е. в одном и том же геометрическим объеме может находиться множество полей, переменные во времени поля распространяются от места своего возникновения в виде волн. В электродинамической картине мира считалось, что свойства этих двух видов материи несводимы друг к другу, слишком контрастны эти свойства (впоследствии, после возникновения квантовой механики, была построена новая квантово-полевая картина мира, в которой было установлено единство вещественного и полевого видов материи).

Первое серьезное затруднение в электродинамической картине мира возникло в 1887 г., когда немецкий физик Г. Герц обнаружил новое физическое явление: под воздействием света отрицательно заряженная металлическая пластинка разряжалась, теряла заряд. После открытия электрона Томсоном в 1897г. было установлено, что отрицательно заряженная металлическая пластинка под действием света теряет электроны. Российским физиком А.Г.Столетовым были установлены законы фотоэффекта (так было названо явление, открытое Герцем). Однако объяснить эти законы с позиций классической физики не удавалось, свет при этом рассматривался как волновой процесс.

В 1905 г. А. Эйнштейн подошел к проблеме фотоэффекта принципиально по-новому. Развивая идею М. Планка о том, что атомы излучают и поглощают энергию порциями, А. Эйнштейн предположил, что электромагнитное излучение и распространяется в пространстве порциями, квантами. Впоследствии этим дискретным порциям электромагнитного поля дали название "фотоны". Приписав порциям электромагнитного излучения свойства частиц-корпускул, А. Эйнштейн составил уравнение, объяснявшее все особенности фотоэффекта. Это уравнение, выражавшее закон сохранения и превращения энергии, для фотоэффекта из металла записывается так:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2} \quad ,$$

где слева стоит энергия фотона, которая расходуется на отрыв электрона из металлического образца (A - "работа выхода") и на сообщение ему (если $A<h\nu$) кинетической энергии. За более подробным разбором законов фотоэффекта отсылаем читателя к специальной литературе (например, к учебному пособию "Физика - 11"). А сейчас же обратим внимание на ту сторону явления, которое нас интересует по условию задачи и связано со специальной теорией относительности: электромагнитное излучение обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами. В истории физики это было первое явление, в котором проявлялся так называемый корпускулярно-волновой дуализм элементарных частиц, положенный затем в основу квантовой механики.

Оказалось, что в природе существуют и другие явления, в которых проявляются корпускулярные свойства излучения. Так, в 1923 г. американский физик А. Х. Комптон наблюдал рассеяние электромагнитного излучения на неподвижных электронах. Как и в случае с фотоэффектом, явление Комптона можно было объяснить, если считать, что излучение обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами. Причем для количественного объяснения этого явления нужно опираться на выводы СТО.

Рассмотрим теорию этого явления (эффект Комптона) в форме задачи. При рассеянии электромагнитного излучения на неподвижном электроне, происходит как изменение энергии рассеянного излучения, так и изменение направления его распространения.

Исходя из корпускулярных свойств фотона, рассчитаем изменение длины волны излучения, а также найдем энергию, приобретаемую электроном.

Найти	$\Delta\lambda,\ E_{кин}$
Дано	λ m $p_ф = \dfrac{h\nu}{c}$ $E_ф = h\nu$

Решение

Выберем систему отсчета “Лаборатория”. Заметим, что мы не должны связывать ИСО с электроном, хотя по условию задачи он до взаимодействия с фотоном находится в покое. Дело в том, что в результате взаимодействия электрон должен приобрести скорость, но в ИСО “Электрон” он и затем должен оставаться неподвижным, что было бы невозможно без введения дополнительных сил связи. Но тогда получалось бы совсем другая задача.

Изобразим процесс рассеяния фотона графически.

Рассматривая и электрон и фотон как корпускулы, составим для этой замкнутой системы взаимодействующих тел формулы законов сохранения и превращения энергии и импульса:

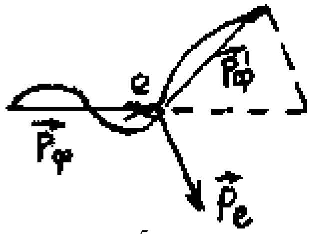

рис.5

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (1)$$

$$\vec{p}_ф = \vec{p}\,'_ф + \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

В формуле (1) первый член слева - энергия фотона, второй - энергия покоя неподвижного электрона в ИСО “Лаборатория”; справа первый член - новая энергия рассеянного фотона, второй - полная энергия рассеянного электрона, включающая как энергию покоя mc^2, так и кинетическую энергию его движения $E_{кин}$. В формуле (2) слева учитывается, что в исходном состоянии импульс электрона равен нулю, справа в формуле (2) стоят импульс рассеянного фотона и релятивистский импульс электрона, который он приобретет в результате взаимодействия. Только использование формул СТО позволяет полностью объяснить все особенности эффекта Комптона. Формула (2) записана в векторной форме. Преобразуем это выражение, используя теорему косинусов из элементарной геометрии:

$$\frac{m^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h^2 \nu^2}{c^2} + \frac{h^2 (\nu')^2}{c^2} - 2h^2 \frac{\nu \cdot \nu'}{c^2} \cos\theta. \qquad (3)$$

Формулу (1) запишем так:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = h\nu - h\nu' + mc^2.$$

Возведем ее в квадрат:

$$\frac{m^2 c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = h^2\nu^2 - h^2(\nu')^2 + m^2c^4 + 2h\nu mc^2 - 2h\nu' mc^2 - 2h^2\nu\nu'.$$

Из этого выражения вычтем формулу (3), умножив предварительно все ее члены на c^2. Получаем:

$$m^2c^4 = m^2c^4 + 2hmc^2(\nu - \nu') - 2h^2\nu\nu(1-\cos\theta).$$

После упрощения оставшегося равенства, придаем выражению следующий вид:

$$(\nu - \nu')mc^2 = h\nu\nu'(1-\cos\theta) \ . \qquad (4)$$

Учитывая, что $\frac{c}{\nu} = \lambda$ и $\frac{c}{\nu'} = \lambda'$, запишем (4) так:

$$(\lambda - \lambda')mc = 2h\sin^2\frac{\theta}{2},$$

где использована формула

$$(1-\cos\theta) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, изменение длины волны излучения равно:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2} \ . \qquad (5)$$

Кинетическая энергия электрона также рассчитывается на основании формул специальной теории относительности:

$$E_{кин} = E_{полн} - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2,$$

где использована формула (1).

Выразим из равенства (4) частоту рассеянного фотона

$$\nu' = \frac{mc^2}{mc^2 + 2h\nu \sin^2\frac{\theta}{2}}\nu$$

и, подставив ее в выражение для $E_{кин}$, получаем функциональную зависимость $E_{кин}$ от частоты падающего фотона:

$$E_{кин} = \frac{2(h\nu)^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{mc^2 + 2h\nu \sin^2\frac{\theta}{2}} \quad (6)$$

Экспериментально явление Комптона можно наблюдать с помощью камеры Вильсона. На пути электронов и на пути рассеянных фотонов появляются ионы (и электроны и фотоны ионизируют молекулы газа, заполняющего камеру Вильсона), на них как на центрах конденсируется пересыщенный пар, что делает видимым путь электронов и фотонов. Из прилагаемой таблицы видно, как хорошо экспериментальные данные согласуются с теорией, свидетельствуя об ее истинности.

θ	$\Delta\lambda_{теор}$	$\Delta\lambda_{эксп}$
72	0,0168	0,0170
90	0,0243	0,0241
110	0,0345	0,0350
160	0,0469	0,0470
170	0,0480	0,0482

Задача №6 СТО и ядерная физика

Когда говорят, что выводы СТО подтверждены экспериментально, то имеют в виду явления и процессы, происходящие с элементарными частицами. Понятие “элементарная частица” - это историческое понятие: с развитием физики в это понятие вкладывалось новое содержание. Так, в древнем мире под элементарной частицей понималось наименьшее количество вещества, оно называлось “атомом”, что в переводе с греческого означает “неделимый”.

В XVIII-XIX вв. под элементарной частицей понималось то, что ныне мы называем молекулой. В конце Х1Х в. была открыта первая истинно элементарная частица - электрон. До сих пор неизвестна природа электрона, но общепризнанно, что он далее неделим. Другие позже открытые элементарные частицы (протон, нейтрон и др.) оказались сложными системами, при определенных условиях они распадаются на более простые. Вот, например, реакция распада отрицательно заряженного мю-мезона (существует и положительно заряженный мю-мезон):

$$\mu_{-1} = e_{-1} + \nu_0 + \tilde{\nu}_0 \quad ,$$

где e_{-1} - электрон, ν_0 и $\tilde{\nu}_0$ - нейтрино и анти -нейтрино.

В этой реакции выполняются законы сохранения энергии, количества движения, электрического заряда, числа лептонов (легких частиц), числа частиц и античастиц и т.д.

До сих пор не построена теория элементарных частиц. Но для описания физических процессов, происходящих с этими частицами, широко используется положения СТО. Именно это и служит экспериментальным доказательством истинности СТО.

Применим некоторые положения СТО для рассмотрения следующей задачи. **В лабораторной ИСО частица А (имеющая массу и импульс) сталкивается с покоящейся частицей В. Может ли частица В поглотить частицу А?**

Решение

Найти	$(A+B)\to X$
Дано	m_A m_B $p_B = 0$

ИСО задана в условии задачи - “Лаборатория”. Хотя частица В неподвижна в этой ИСО в начальный момент времени, но с ней нельзя связывать начало СО, так как после столкновения с частицей *А* частица *В* должна прийти в движение. *А* тело отсчета (начало системы координат) должно быть неподвижно в выбранной ИСО. Чертеж в данной задаче не имеет смысла делать.

Для решения задачи воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. До столкновения энергия системы слагалась из энергии налетающей частицы *A*:

$$E_A = \sqrt{m_A^2 \cdot c^4 + p^2 c^2}$$

и энергии покоящейся частицы *B*:

$$E_B = m_B c^2 \quad .$$

Суммарная энергия частиц *A* и *B* до столкновения равна:

$$E = E_A + E_B = \sqrt{m_A^2 c^4 + p^2 c^2} + m_B c^2 .$$

После столкновения, в результате которого частица *A* (по условию задачи) будет поглощена частицей *B*, полная энергия последней будет:

$$E'_B = \sqrt{m_B^2 c^4 + p^2 c^2} .$$

Эта формула учитывает, что масса частицы *B* (как и всех других элементарных частиц) является абсолютной, инвариантной величиной. Кроме того, на основании закона сохранения импульса, у частицы *B*, которая по предположению должна поглотить частицу *A*, будет тот же импульс, какой был у частицы *A* до столкновения (частица *B* до столкновения была неподвижна, ее импульс равнялся нулю).

Замкнутость системы позволяет составить равенство:

$$m_B c^2 + \sqrt{m_A^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{m_B^2 c^4 + p^2 c^2} \quad .$$

Возведем обе стороны равенства в квадрат и перенесем все члены в одну сторону его, получаем:

$$2 m_B c^2 \sqrt{m_A^2 c^4 + p^2 c^2} + m_A^2 c^4 = 0 \qquad .$$

Это равенство для реальных частиц не может выполняться, так как все его члены - положительные величины. Таким образом, сделанное в условии задачи предположение, что при столкновении с движущейся частицей *A* ранее неподвижная частица *B* поглотит частицу *A* и останется прежней частицей *B*, невозможно. Например, фотон, налетая на свободный электрон, как в эффекте Комптона, не может быть поглощен электроном. В результате столкновения фотона с неподвижным электроном возникнет фотон рассеяния и электрон отдачи .

Совсем другое дело, если в результате столкновения будут рождаться и другие элементарные частицы.

Задача №7. Столкновение релятивистских частиц

Элементарные частицы образуют особый мир - микромир. Их нельзя увидеть даже в электронный микроскоп, дающий увеличение угла зрения в миллионы раз. Ведь элементарные частицы (электроны, позитроны, мезоны, протоны, нейтроны и др.) в 10^5 раз меньше атомов, а последние во столько раз меньше размеров среднего яблока, во сколько оно меньше Земли. И все же ученным удалось проникнуть в микромир и обнаружить у элементарных частиц удивительные, иногда странные, непривычные свойства. Удалось установить время их жизни (некоторые элементарные частицы живут всего лишь 10^{-23} с, другие - "долгоживущие" исчезают, превращаясь в другие частицы, за 10^{-8} с (одна стомиллионная доля секунды!), определены массы частиц и произведена их систематизация. И все же к концу XX в. физикам не удалось создать полную теорию элементарных частиц.

Но как же физики смогли открыть множество элементарных частиц (сейчас их известно более 300!), установить их электрический заряд, массу и другие физические характеристики? Все это удалось сделать, **приводя элементарные частицы во взаимодействия**, так как только в таком случае можно выявить и количественно определить физические свойства элементарных частиц, установить их "характер". Чтобы привести частицы во взаимодействие, их надо "столкнуть", предварительно увеличив их скорость, энергию движения.

Читателю, очевидно, известны различные ускорительные устройства (циклотрон, бетатрон, синхротрон и т. д.), в которых используются электрические и магнитные поля. С их помощью осуществляется процесс ускорения элементарных частиц, которые затем и приводятся во взаимодействие. В последние годы широко используется метод исследования свойств элементарных частиц, когда эти частицы летят навстречу друг другу ("метод встречных пусков"). Ниже при решении задачи мы увидим преимущества этого метода.

Чтобы увидеть результат взаимодействия частиц между собой или со средой, через которую они пролетают, используются различные регистрационные устройства типа "счетчиков", различных "камер" (камера Вильсона, ионизационная, пузырьковая, и др.), фотопластинки и т. д.

Рассмотрим процесс столкновения двух элементарных частиц на примере реально осуществляющейся реакции.

Определить энергию взаимодействия неподвижного протона с налетающим на него протоном, если энергия последнего 70 ГэВ .

Запишем условие задачи кратко, выберем ИСО и далее будем решать задачу по общему плану.

Найти	$E_{вз}$
Дано	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,кг$ $v_{p1} = 0$ $E_{p2} = 70\,ГэВ$

Решение

Выберем ИСО "Лаборатория", в которой находятся все необходимые приборы, с помощью которых мы не только сообщим второму протону энергию E_{p2}, но и зарегистрируем акт взаимодействия протонов между собой.

Как неоднократно указывалось ранее, в современной физике понятие ИСО расширилось до физической лаборатории, где имеется все, что необходимо для наблюдения физического процесса. В выбранной ИСО первый протон неподвижен , второй движется со скоростью v_{p2} . Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, уточним, что понимается в физике элементарных частиц под энергией взаимодействия: **принято называть энергией взаимодействия двух элементарных частиц их общую энергию в той ИСО, в которых их суммарный импульс равен нулю.**

Составим выражение для полной энергии сталкивающихся протонов в исходной ИСО "Лаборатория":

$$E = E_{0p1} + E_{p2} = mc^2 + E_{p2} \ .$$

При этом было учтено, что у первого протона есть только энергия покоя . Суммарный импульс системы в векторной форме запишется так:

$$\vec{p} = \vec{p}_{10} + \vec{p}_2 = \vec{p}_2 \quad ,$$

так как первый протон неподвижен и его импульс равен нулю.

Рассматривая обе частицы в момент столкновения как одну сложную систему, составим для нее ту формулу Эйнштейна, которая является более общей, так как справедлива и для частиц, не имеющих массу, как например, фотон :

$$E = \sqrt{M^2c^4 + p^2c^2} \ ,$$

откуда

$$M^2c^4 = E^2 - p^2c^2 \quad ,$$

или $M^2c^4 = \left(E_2 - mc^2\right)^2 - \left(E_2^2 - m^2c^4\right) = 2E_2mc^2 + 2m^2c^4 = 2E_{10}E_2 + 2E_{10}^2.$

Следовательно,

$$Mc^2 = \sqrt{2E_{10}E_2 + 2E_{10}^2} \quad ,$$

где M определяет суммарную массу взаимодействующих протонов.

Рассматриваемая реакция реально осуществляется на протонном ускорителе в г. Серпухове.

Так как энергия покоя протона

$E_{10} = mc^2 = 14{,}03 \cdot 10^{-11}\, Дж = 0{,}938\, ГэВ$,

то для величины Mc^2, которую мы рассматриваем как полную энергию системы в момент столкновения, иными словами, как энергию взаимодействия, получаем :

$Mc^2 = 11{,}54\, ГэВ.$

Как видно из количественного результата, только малая доля энергии налетающего протона расходуется на саму реакцию взаимодействия.

Иначе обстоит дело, когда рассматривается взаимодействие частиц во встречных пучках. Покажем это с помощью элементарных расчетов, рассмотрев следующую задачу.

Во встречных пучках сталкивается два электрона с энергией $E_1 = E_2 = 6\, МэВ$ (1 МэВ=10^6эВ). Какова энергия взаимодействия этих частиц?

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$E_{вз}$
Дано	$m_e = 0{,}51\, МэВ$
	$E = 6\, МэВ$
	$E_1 = E_2 = E$
	$v_1 = v_2 = v$

Решение

Выберем ИСО “Центр масс”. Но в данной задаче она совпадает с ИСО “Лаборатория”, так как одинаковые частицы - электроны - движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и их центр масс неподвижен в ИСО “Лаборатория”.

Энергия взаимодействия равна энергии относительного движения электронов, если суммарный импульс системы до и после столкновения равен нулю. Энергию относительного движения мы определим по формуле:

$$E_{отн} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

где V - скорость относительного движения электронов относительно друг друга. Эту величину определим так. Выберем новую ИСО “1-й электрон”, в которой второй электрон как раз и имеет скорость V. Воспользуемся формулой теоремы сложения скоростей СТО в одномерном движении:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \cdot$$

Применительно к нашей задаче $u_x = V, v = v_1, u'_x = v_2 = v$ - скорость 2-го электрона в ИСО "Лаборатория".

Тогда

$$v = \frac{V_v}{1 - \frac{V_v}{c^2}}$$

Разрешим это равенство относительно *V*, получаем

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad .$$

Теперь имеем возможность рассчитать $E_{вз}$ через данные задачи

$$E_{вз} = E_{отн} = \frac{E_0\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad .$$

Из формулы $E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ можно определить $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{E_1^2}$,

соответственно $1 + \frac{v^2}{c^2} = 2 - \frac{E_0^2}{E_1^2}$.

Составим выражение для $E_{вз}$

$$E_{вз} = E_{отн} = \frac{E_0 E_1^2 \left(2 - \frac{E_0^2}{E_1^2} \right)}{E_0^2} \cong \frac{2E_1^2}{E_0} ,$$

где сделано разумное упрощение , так как $\frac{E_0^2}{E_1^2} << 1$.

Подставляя числовые данные, получаем, что на взаимодействие электронов во встречных пучках в ИСО “Лаборатория” приходится энергии

$$E_{вз} = \frac{2 \cdot 36 (МэВ)^2}{0{,}51\ МэВ} = 141\ МэВ .$$

Результат этой задачи показывает, как перспективен метод взаимодействия частиц на встречных пучках.

Интересен вопрос о том, в каком ускорителе можно получить тот же эффект. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть одна частица сталкивается с другой, которая неподвижна в данной ИСО. В момент столкновения образуется промежуточная частица, для которой формула Эйнштейна будет иметь вид:

$$\left(mc^2 + E \right)^2 = M^2 c^4 + p^2 c^2,$$

или $$M^2 c^4 = \left(mc^2 + E \right)^2 - p^2 c^2 ,$$

где M - масса промежуточной частицы, E - ее энергия, p - ее импульс, а m - масса неподвижной частицы.

Преобразуем последнее соотношение:

$$M^2 c^4 = m^2 c^4 + 2mc^2 E + E^2 - p^2 c^2 .$$

Но $\left(E^2 - p^2 c^2 \right)$ равняется квадрату массы налетающей частицы, умноженной на c^4, следовательно,

$$M^2 c^4 = m^2 c^4 + 2mc^2 E + m^2 c^4 = 2m^2 c^4 + 2mc^2 E. \cdot$$

Нам нужно найти такой ускоритель, который сообщает ускоряемой частице энергию, равную энергии, выделяющейся при столкновении встречных пучков. Поэтому приравняем $Mc^2 = 2E$,

тогда $4E^2 = 2m^2 c^4 + 2mc^2 E$,

откуда. $E_x = \dfrac{4E^2 - 2m^2c^4}{2mc^2} = \dfrac{2E^2}{mc^2} - mc^2 \approx \dfrac{2E^2}{mc^2}$

Если *E=70ГэВ,* $m = m_p = 0{,}938$ *ГэВ,* , то

$E_x = 10^5$ *ГэВ* !

Полученный результат означает, что ускоритель на встречных пучках эквивалентен по эффективности одиночному ускорителю с неподвижной мишенью, сообщающей частице энергию *10^5ГэВ*. Такие ускорители еще не построены...