Раздел 5.
Задачи по статистической физике

Задача №1

Показать, что число ударов молекул газа о единичную площадку поверхности сосуда за 1 секунду может быть записано в виде $\nu = \dfrac{n\overline{V}}{4}$, n – *число молекул в единице объема.*

Решение

Найти	ν
Дано	$\rho_M(V_x)$

Свяжем СО с сосудом, в котором находится газ. Воспользуемся распределением Максвелла для распределения молекул газа по проекции скорости.

Число молекул газа в единице объема с компонентой скорости V_x из интервала V_x, $V_x + dV_x$ определяется формулой:

$$dn(V_x) = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\alpha V_x^2\right) dV_x,$$

где $\alpha = \dfrac{m}{2kT}$.

За единицу времени с площадкой в 1 кв. см. поверхности сосуда столкнуться $d\nu$ таких молекул, причем

$$d\nu(V_x) = V_x \cdot dn(V_x).$$

Следовательно, общее число столкновений с указанной единичной площадкой за единицу времени будет равно:

$$\nu = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int V_x \exp\left(-\alpha V_x^2\right) dV_x = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{n}{4}.$$

Учитывая выражение для средней скорости молекул газа:

$$\overline{V} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

получаем искомый ответ: $\nu = \dfrac{n\overline{V}}{4}$.

Задача №2

При какой температуре средне квадратичная скорость молекул кислорода O_2 равна такой же скорости молекул азота N_2, взятого при температуре $100^0 C$?

Найти	T_1
Дано	$T_2 = 100^0 C$ $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\overline{v_2^2}}$

Решение

Систему отсчета свяжем со статистической системой "Идеальный газ". Построим график, соответствующий распределению молекул идеального газа по модулю скорости. Далее получим выражение для средней квадратичной скорости, используя обычную формулу для расчета среднего значения любой физической величины:

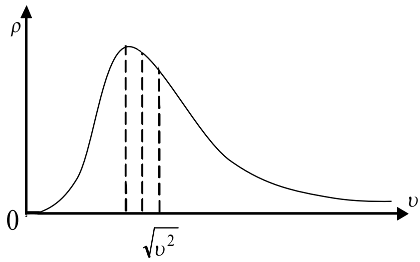

Рис.1

$$\bar{x} = \int x\rho d\Gamma.$$

В нашей задаче под x подразумевается v^2, т.е. нам нужно рассчитать интеграл:

$$\overline{v^2} = \int v^2 C \exp\left(-\frac{mv^2}{2\Theta}\right)(dq)(dp),$$

причем, постоянную C определим, используя условие нормировки:

$$C = \frac{1}{\int \exp\left(-\frac{mv^2}{2\Theta}\right)(dp)(dq)}.$$

Очевидно, что интегралы по координатам рассчитывать не надо, они сокращаются, будучи и в числителе и в знаменателе.

Произведя расчет (это необходимо сделать), получим следующее выражение для квадрата средней квадратичной скорости:

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{\mu}.$$

Составим условие задачи - равенства средних квадратичных скоростей молекул кислорода и азота:

$$\frac{3RT_1}{\mu_1} = \frac{3RT_2}{\mu_2},$$

откуда $$T_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} T_2 = \frac{2 \cdot 16 г/моль}{2 \cdot 14 г/моль} \cdot 373 К = 426{,}3\,К.$$

Интересно рассчитать среднюю квадратичную скорость при комнатной температуре (проделать самостоятельно) и сопоставить ее со скоростями, с которыми мы встречаемся в обыденной жизни. Сделать вывод о роли движения структурных частиц вещества в различных физических процессах (в диффузии, Броуновском движении, в процессе дефекто образования в твердых телах и т.д.).

Задача №3

Подсчитать число частиц идеального газа, скорости которых заключены в интервале $0 \le v \le v_в$, *где* $v_в$ *- вероятная скорость в распределении Максвелла.*

Найти	$N_{0 \le v \le v_в}$
Дано	$dW_{Максв}$

Решение

Систему отсчета назовем “Идеальный газ”.

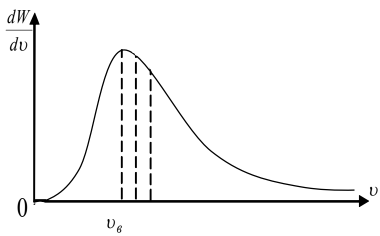

Рис.2.

Изобразим графически распределение Максвелла и отметим положение вероятной, средней и среднеквадратичной скоростей.

Исходя из выражения для распределения Максвелла по модулю скорости, получаем искомое значение числа молекул с заданными значениями скоростей:

$$N_{0 \le v \le v_d} = C \int_0^{v_в} \exp\left(-\alpha v^2\right) v^2 dv,$$

где $C = 4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\alpha = \frac{m}{2kT}$, $v_в = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$.

Далее будем брать интеграл по частям:

$$N_{0 \le v \le v_в} = N\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int \exp\left(-t^2\right)dt - \frac{2}{e\sqrt{\pi}}\right] = N\left[erf(1) - \frac{2}{e\sqrt{\pi}}\right],$$

где введено обозначение $t = \sqrt{\alpha}v$, а величина $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int \exp\left(-t^2\right)dt = erf(x)$ – так называемый интеграл ошибок, численное значение которого определяется верхним пределом и для которого составлены таблицы значений. В нашем случае его значение равно 0.84.

Таким образом, окончательный расчет дает следующий ответ на поставленный вопрос:

$$N_{0 \le v \le v_в} = 0{,}43\, N$$

Задача №4

Какая часть молекул идеального газа имеет кинетическую энергию поступательного движения выше средней $E \ge \overline{E} = \frac{3}{2}kT$.

Найти	$\frac{N_{E \ge \overline{E}}}{N}$
Дано	$E \ \ge \ \overline{E} \ = \ \frac{3}{2}kT$ $U = 0$ $dW_{максв}$

Решение

Наша статистическая система-идеальный газ. Поэтому назовем СО “Идеальный газ”. Построим график функции распределения Максвелла, отобразим на ней расположение скоростей –вероятной, средней и среднеквадратичной квадратичной .Само распределение Максвелла нам задано в виде функции от модуля скорости:

$$dW = C\,v^2 dv \sin\vartheta d\vartheta\, d\varphi . \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

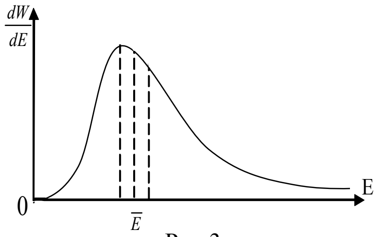

Рис.3.

Преобразуем его, представив в виде функции от энергии. Энергия идеального газа – это кинетическая энергия, т.е.

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Откуда

$$v^2 = \frac{2E}{m}, \Rightarrow v^2 dv = \frac{dE}{m}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Итак, запишем распределение Максвелла по энергиям:

$$dW(E) = Const \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^3}} \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) E^{\frac{1}{2}} dE.$$

Тогда искомая величина может быть рассчитана по формуле:

$$\frac{N_{E \geq \bar{E}}}{N} = Const \cdot' \int_{\bar{E}}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) E^{\frac{1}{2}} dE.$$

Перейдем к новой переменной:

$$x = \sqrt{E},$$

а затем проинтегрируем по частям:

$$\int_{\bar{E}}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) E^{\frac{1}{2}} dE = 2 \int_{\sqrt{\bar{E}}}^{\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) x^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{\beta} x \exp\left(-\beta x^2\right)\Big|_{\sqrt{\bar{E}}}^{\infty} + \frac{1}{\beta} \int_{\sqrt{\bar{E}}}^{\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\sqrt{\bar{E}} \exp\left(-\beta \bar{E}\right) + \frac{1}{\beta^{\frac{3}{2}}} \int_{\sqrt{\beta \bar{E}}}^{\infty} \exp\left(-t^2\right) dt,$$

где $\beta = \frac{1}{kT}.$

Последний интеграл сведем к табличному интегралу ошибок:

$$\int_{\sqrt{\beta\overline{E}}}^{\infty}\exp\left(-t^2\right)dt=\int_0^{\infty}\exp\left(-t^2\right)dt-\int_0^{\sqrt{\beta\overline{E}}}\exp\left(-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1-erf\left(\sqrt{\beta\overline{E}}\right)\right]$$

Таким образом, искомая величина равна:

$$\frac{N_1}{N}=\sqrt{\frac{6}{\pi}\exp\left(-\frac{3}{2}\right)}+1-erf\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\approx$$

$$=0{,}31+1-0{,}92=0{,}39=39\%$$

Задача №5

Найти число молекул идеального газа, падающих на единицу площади сосуда в единицу времени под данным углом к нормали, восстановленной к площадке падения.

Найти	$dN(\vartheta)/S\cdot t\,d\varphi\cdot$
Дано	ϑ
	S
	t

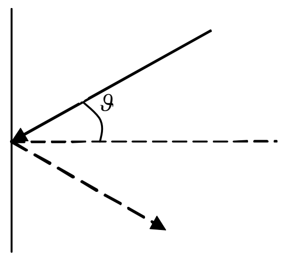

Рис.4.

Решение

Назовем СО "Сосуд". Сделаем чертеж. Составим выражение для искомой величины.

Естественно, что число падающих частиц будет пропорционально полному числу частиц, двигающихся к площадке, величине площади площадки, времени наблюдения. А так как не все молекулы обладают одной и той же скоростью, то необходимо воспользоваться функцией распределения Максвелла.

Кроме того, необходимо учесть направление полета частиц. И только те частицы, которые имеют положительную проекцию скорости на нормаль к площадке(а не скользят вдоль нее или летят от нее)., попадут на площадку.

Итак: $dN(\vartheta) = N \cdot S \cdot t \cdot \rho_M \cdot (vCos\vartheta)$.

Воспользуемся формулой для распределения Максвелла по модулю скорости (в силу симметрии задачи возьмем ее в сферических координатах):

$$dW_M = C \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2\Theta}\right) v^2 dv \cdot Sin\vartheta d\vartheta \cdot d\varphi \,.$$

Составим искомое выражение:

$$dN(\vartheta) / S \cdot t \cdot d\varphi = C \cdot N \cdot v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2\Theta}\right) dv \; Sin\vartheta \cdot Cos\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\upsilon$$

Задача № 6

Найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа, находящихся в сосуде высотой h в однородном поле силы тяжести

Найти	$\overline{U}$
Дано	h g

Решение

По условию задачи предполагается, что сосуд с газом находится на Земле, поэтому СО назовем "Земля".

Нам необходимо найти $\overline{U} = mg\bar{z}$, т.е. задача сводится к нахождению средней координаты $\bar{z}$.

Для решения задачи воспользуемся распределением Больцмана, считая газ в сосуде –идеальным газом:

$$dW_Б(z) = C \cdot \exp(-mgz / kT) dz,$$

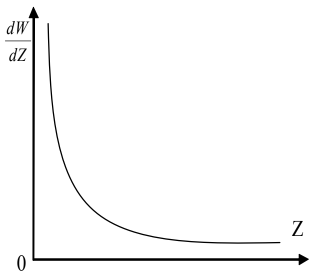

Рис.5.

при этом мы считаем, что распределение частиц на данной высоте по площадке $dS = dx \cdot dy$ постоянно, одинаково на всей площадке.

Постоянную C определим из условия нормировки:

$$\int dW_Б(z) = 1, \Rightarrow C = \frac{1}{\int\limits_0^h \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)dz}.$$

Тогда $\overline{U} = mg\dfrac{\int\limits_0^h z\cdot\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)dz}{\int\limits_0^h \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)dz}.$

Сделаем элементарные преобразования, которые упростят нахождение интегралов. Введем новую переменную
$\beta = mg/kT$,

тогда $\overline{U} = -mg\dfrac{\frac{\partial}{\partial\beta}\int\limits_0^h \exp(-\beta z)dz}{\int\limits_0^h \exp(-\beta z)dz} = -mg\dfrac{\frac{\partial}{\partial\beta}Z}{Z} = -mg\dfrac{\partial}{\partial\beta}\ln Z,$

где интеграл Z есть ни что иное, как статистический интеграл. Подсчитаем его значение в данной задаче:

$$Z = \int\limits_0^h \exp(-mgz/kT)dz = \left[\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\left(-\frac{kT}{mg}\right)\right]_0^h = \frac{kT}{mg}\left(1 - e^{-\frac{mgh}{kT}}\right).$$

Осталось подсчитать искомую величину. Напишем конечный результат (но читателю необходимо все действия выполнить полно):

$$\overline{U} = kT\left[1 - \frac{mgh}{kT}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{mgh}{kT}\right) - 1}\right].$$

Интересно сделать анализ полученной величины при разных значениях высоты сосуда и температуры.

Задача №7

Найти среднюю потенциальную энергию молекулы идеального газа, находящегося в центрифуге радиуса R*, вращающейся с угловой скоростью* $\omega = Const$.

Найти	$\overline{U}$
Дано	R $\omega = Const$

Решение

Свяжем СО с лабораторией, в которой находится центрифуга.

Идеальный газ во вращающейся центрифуге эквивалентен идеальному газу в внешнем силовом поле $F = m\omega^2 r$, где r - расстояние молекулы от оси вращения. Вычислим потенциальную энергию молекулы в таком силовом поле, используя известное из классической механики соотношение между силой и потенциальной энергией:

$$m\omega^2 r = -\frac{dU}{dr} \quad \Rightarrow \quad U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Применим к решению задачи распределение Больцмана, записав его в цилиндрических координатах (в соответствии с симметрией установки- центрифуги):

$$dW_Б(r,\varphi,z) = C \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dV = C \cdot \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Считая все направления от оси вращения равноправными и равноправны все сечения, перпендикулярные оси Oz, для распределения Больцмана получаем следующее упрощенное выражение:

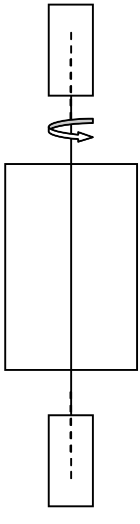

Рис.6.

$$dW_Б(r) = A \cdot \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r\,dr.$$

Константу A определяем из условия нормировки:

$$A = \frac{1}{\int\limits_0^R \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r\,dr} = \frac{\frac{m\omega^2}{kT}}{\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right) - 1}.$$

Итак,

$$\overline{U} = -\frac{m^2\omega^4}{2kT}\cdot\frac{\int\limits_0^R \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r^3 dr}{\exp\frac{m\omega^2 R^2}{2kT} - 1} =$$

$$= -kT\,\frac{1+\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT} - 1\right)\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right)}{\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right) - 1}.$$

Читателю представляется возможность самостоятельно разобраться в знаке (-) у средней энергии молекул газа, а также произвести исследование искомой величины при разных значениях радиуса центрифуги и температуры газа.

Задача №8

Какая доля молекул кислорода земной атмосферы при температуре T=300 K может преодолеть гравитационное поле Земли?

Найти	$\frac{n_\infty}{n_0}$
Дано	O_2 $T = 300K$ μ

Решение

Свяжем систему отсчета с землей-“СО “Земля”. Учитывая условие задачи, не будем рисовать чертеж.

Очевидно, что для решения задачи необходимо воспользоваться распределением Больцмана и следующей из него формулой распределения частиц по высоте:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right), \qquad (1)$$

где n_0 - концентрация частиц на поверхности Земли.

Преобразуем показатель степени экспоненты следующем образом, введя в рассмотрение радиус Земли и расстояние от центра Земли до некоторой точки над поверхностью Земли (дело в том, что величина h является разностью этих величин $h = r - r_0$.).

С одной стороны, имеем для материальной точки на поверхности Земли : $F = mg$.

С другой стороны, эта же величина может быть выражена через формулу закона всемирного тяготения:

$$F = G\frac{mM_З}{r_0^2},$$

где $m, M_З$ - масса материальной точки (в нашем случае – масса молекул кислорода) и масса Земли.

Приравниваем правые стороны этих двух формул:

$$mg = G\frac{mM_З}{r_0^2}.$$

Откуда:

$$GmM_З = mgr_0^2\,. \tag{2}$$

Запишем величину $mgh = U_0 - U$, где учтено, что величина mgh действительно определяет изменение потенциальной энергии материальной точки. Величины потенциальной энергии частицы в двух положениях можно записать так:

$$U_0 = G\frac{mM_З}{r_0}; \qquad U = G\frac{mM_З}{r}.$$

Составим

$$mgh = U_0 - U = G\frac{mM_З}{r_0} - G\frac{mM_З}{r} = GmM_З\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = mgr_0^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right),$$

где использована формула (2).

Итак,

$$n(r) = n_0 \exp\left[-\frac{mgr_0^2}{kT}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right]. \tag{3}$$

Формула (3) справедлива при любом подъеме частицы над поверхностью Земли, в том числе и тогда, когда частица удаляется на бесконечность. Но в этом случае $\dfrac{1}{r_\infty} = 0$ и формула (3) упрощается:

$$n(\infty) = n_0 \exp\left(-\frac{mgr_0}{kT}\right),$$

откуда $\dfrac{n_\infty}{n_0} = \exp\left(-\dfrac{mgr_0}{kT}\right) = \exp(-800) \approx 10^{-344}.$

Задача №9

Найти фазовый объем, занимаемый линейным гармоническим осциллятором с энергией E.

Найти	$\Gamma(E)$
Дано	$x = A\sin\omega t$

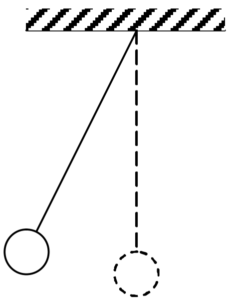

Рис.7.

Решение

Выберем СО "Центр масс гармонического осциллятора". Около центра масс осциллятор совершает гармоническое движение, т.е. совершает движение по закону $x = A\sin\omega t$. Из определения центра масс следует, что в данной задаче он совпадает с равновесным положением колеблющейся материальной точки. Добавим еще одно определение: гармоническое движение происходит под действием гармонической силы, которая пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную смещению.

Для определения фазового объема, предоставленного гармоническому осциллятору, нужно найти уравнение его траектории. И площадь, охваченная этой траекторией в координатах (p,q), численно будет равна искомому фазовому объему.

Определим фазовые координаты осциллятора. Пространственная координата нам задана по условию задачи. Составим производную по времени и умножим на массу колеблющейся материальной точки – это определит импульс осцилятора:

$$x = A\sin\omega t; \quad p = mA\omega\cos\omega t.$$

Исключив из этой системы равенств время, мы определим уравнение фазовой траектории гармонического осциллятора:

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 \omega t &= \frac{x^2}{A^2},\\ \cos^2 \omega t &= \frac{p^2}{(m\omega A)^2}\end{aligned}\right\} \qquad 1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(m\omega A)^2}.$$

Мы получили уравнение эллипса с полуосями $a = A$, $b = m\omega A$. Известно, что площадь, охваченная кривой эллипса, определяется по формуле:

$$S = \pi ab = \pi A^2 \omega m = \Gamma(E).$$

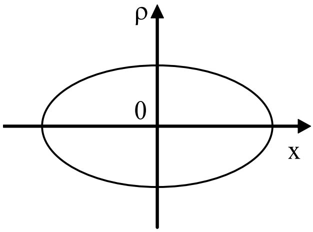

Рис.8.

Однако по условию задачи эту площадь, численно равную “фазовому объему” (который в данной задаче двумерен, так как осциллятор совершает одномерное гармоническое движение, определяемое обобщенной координатой и обобщенным импульсом) необходимо выразить через энергию осциллятора E.

Составим выражение для полной энергии гармонического осциллятора:

$$E = E_{кин} + E_{пот} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Выразим из этого выражения квадрат амплитуды и подставим в формулу фазового объема:

$$\Gamma(E) = \frac{E}{\nu}.$$

Задача №10

Определить фазовые траектории 4-х произвольных материальных точек статистической системы, совершающих одномерное движение в постоянном поле тяжести. Проверить выполнимость теоремы Лиувилля.

Найти	$p_i = p_i(q_i)$
Дано	$g=Const$

Решение

Назовем СО “Статистическая система”.

Для каждой материальной точки, совершающей одномерное движение, фазовое пространство двухмерное. Составим уравнения движения выбранных 4-х материальных точек. Для упрощения решения расположим их на двухмерной фазовой плоскости по вершинам произвольного прямоугольника.

В обычном геометрическом пространстве движение частиц в поле тяжести будет ускоренным согласно уравнениям:

$$q = q_0 + \frac{p_0}{m} t + \frac{gt^2}{2}, \qquad p = p_0 + mgt.$$

Решим совместно эту систему уравнений, освободимся от временного параметра *t,* выразив его из второго уравнения $t = \frac{p - p_0}{mg}$. После элементарных преобразований получаем уравнение фазовой траектории:

$$(q - q_0) mg = \frac{p^2 - p_0^2}{2m}.$$

Вид этого уравнения позволяет утверждать, что фазовая траектория каждой материальной точки нашей системы – это парабола с вершиной на оси Oq.

Для проверки выполнимости теоремы Лиувилля определим начальный и промежуточный фазовые объемы, занимаемые избранными 4-мя материальными точками. Как видно из рисунка, первоначальный фазовый объем равен $\Delta\Gamma = \Delta q_0 \cdot \Delta p_0$. Определим начальные фазовые координаты всех 4-х материальных точек:

У первой точки: q_0, p_0;

У второй: $q_0 + \Delta q_0, \quad p_0$;

У третьей: $q_0, \quad p_0 + \Delta p_0$;

У четвертой: $q_0 + \Delta q_0; \quad p_0 + \Delta p_0$.

Через промежуток времени t обобщенные координаты будут следующие:

У первой частицы $q_1 = q_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{gt^2}{2}, \quad p_1 = p_0 + mgt.$

У второй частицы $q_2 = q_0 + \Delta q_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{gt^2}{2}, \quad p_2 = p_0 + mgt.$

У третьей - $q_3 = q_0 + \dfrac{p_0 t}{m} + \dfrac{\Delta p_0 t}{m} + \dfrac{g t^2}{2}, \quad p_3 = p_0 + mgt.$

У четвертой -

$$q_4 = q_0 + \Delta q_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{\Delta p_0 t}{m} + \frac{g t^2}{2}, \qquad p_4 = p_0 + \Delta p_0 + mgt.$$

Убедимся, что в новом положении четыре материальные точки располагаются по вершинам параллелограмма. Действительно, разности $q_4 - q_3 = q_2 - q_1 = \Delta q_0$.

Соответственно, $p_4 - p_3 = p_2 - p_1 = 0$.

По одному из признаков параллелограмма (противоположные стороны равны и параллельны) утверждаем, что материальные точки располагаются по вершинам параллелограмма. Его площадь равна $S = \Delta q_0 \cdot \Delta p_0 = \Delta\Gamma$.

Тем самым мы доказали выполнение теоремы Лиувилля.

Сделаем чертеж.

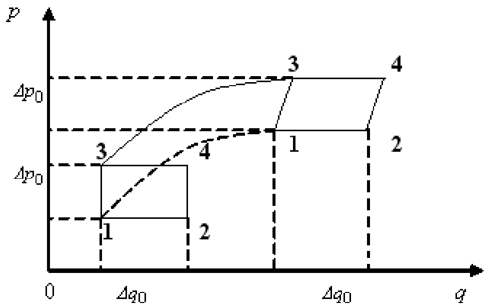

Рис.9.

Задача №11

Записать в классическом приближении распределение Гиббса по энергии для линейного гармонического осциллятора и найти среднее значение его энергии

Найти	$dW(E),\ \overline{E}$
Дано	$\Gamma(E)=\dfrac{E}{\nu}$

Решение

Назовем СО "Центр масс гармонического осциллятора". Запишем каноническое распределение Гиббса:

$$dW(E)=\frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)d\Gamma,$$

$$Z=\int\limits_{\Gamma}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)d\Gamma.$$

По условию задачи $\Gamma(E)=\dfrac{E}{\nu}$, то $d\Gamma=\dfrac{dE}{\nu}$, тогда

$$Z=\frac{1}{\nu}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dE=\frac{kT}{\nu}.$$

И распределение Гиббса по энергии для гармонического осциллятора принимает вид:

$$dW(E)=\frac{1}{kT}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dE.$$

Среднее значение энергии гармонического осциллятора в классическом приближении определим по обычной формуле нахождения среднего значения любой физической величины:

$$\overline{E}=\frac{\int\limits_{0}^{\infty}E\cdot\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)d\Gamma}{Z}.$$

Используя предыдущие выражения и интегрируя по частям, получаем:

$\overline{E}=kT.$

Полученный результат соответствует классической теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Полная энергия гармонического осциллятора содержит два квадратичных члена, и на каждый их них в среднем приходится энергии $\frac{1}{2}\kappa T$.

Задача №12

Найти выражение для энтропии S через интеграл состояния системы Z.

Найти	*S(Z)*
Дано	$Z = \exp\left(-\frac{\varphi}{\Theta}\right)$ $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$

Решение

Данная задача имеет аналитический (математический) характер, поэтому выбирать СО не следует (СО “работает” только в физике).

В статистической физике функция φ является аналогом термодинамической функции состояния F - свободной энергии. Поэтому выражение для статистического интеграла можно переписать в следующем виде:

$$Z = \exp\left(-\frac{F}{\Theta}\right).$$

Тогда, составляя натуральный логарифм , получаем:

$$F = -\Theta \ln Z.$$

Используя термодинамическое соотношение $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$, получаем искомый результат:

$$S = k\left(\ln Z + \frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right).$$

Это соотношение устанавливает связь термодинамической функции состояния – энтропии- со статистическими свойствами статистической системы, выражаемыми статистическим интегралом. Продолжением задачи может быть расчет энтропии для идеального газа, статистический интеграл для которого нам известен $Z = V^N (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}N}$.

Задача №13

Выразить термодинамический потенциал Гиббса Φ *через статистический интеграл* Z.

Найти	$\Phi = \Phi(Z)$
Дано	$Z = \exp\left(-\dfrac{\varphi}{\Theta}\right)$

Решение

Задача является аналитической, формально применимой к любой статистической системе. Поэтому и СО назовем "Статистическая система".

В курсе "Термодинамика" мы определили термодинамический потенциал Гиббса следующим образом:

$$\Phi = U - TS + pV = F + pV = \varphi + pV,$$

где мы учли, что у термодинамического потенциала F аналогом является функция φ.

Воспользуемся выражением для статистического интеграла любой статистической системы:

$$Z = \exp\left(-\frac{\varphi}{\Theta}\right),$$

откуда выразим аналог статистической свободной энергии:
$\varphi = -\Theta \ln Z$.

С другой стороны, в курсе "Термодинамика" было получено уравнение состояния в следующем виде:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad \text{или} \quad p = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial V}\right)_T.$$

Составим произведение pV:

$$pV = -V\left(\frac{\partial \varphi}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial \varphi}{\frac{\partial V}{V}}\right)_T = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ln V}\right)_T = \Theta\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T.$$

Таким образом, искомое выражение принимает вид:

$$\Phi = -\Theta \ln Z + \Theta\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T = \Theta\left[\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T - \ln Z\right].$$

В качестве примера, рассчитаем термодинамический потенциал Гиббса, зная что для идеального газа $Z = V^N (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}N}$ (*сделать самостоятельно*).

Задача №14

Определить фазовую траекторию движущейся частицы при наличии силы трения, пропорциональной скорости.

Найти	$p = p(q)$
Дано	$F \sim \dot{q}$

Решение

Систему отсчета свяжем с “Лабораторией”. Сделаем чертеж. Уравнение движения возьмем в форме формулы 2-го закона Ньютона для одномерного движения:

$$m\ddot{q} = -\mu\dot{q},$$

или $$\dot{u} + \frac{\mu}{m}u = 0, \tag{1}$$

где $u = \dot{q}$, $\dot{u} = \ddot{q}$, μ - коэффициент трения.

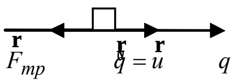

Рис.10.

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно скорости. Решим его при начальных условиях:

$$q_{t=0} = q_0, \quad u_{t=0} = u_0.$$

Уравнение (1) можно записать так:

$$\frac{du}{u} = -\frac{\mu}{m}dt. \tag{2}$$

Интегрирование уравнения (2) при учете начальных условий дает:

$$u = u_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right). \tag{3}$$

Но $u = \dot{q}$, поэтому для координаты получаем уравнение, следующее из (3):

$$dq = u_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)dt,$$

откуда $$\int_{q_0}^{q} dq = \int_0^t u_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)dt.$$

В результате взятия интеграла, получаем:

$$q - q_0 = u_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right)\left(-\frac{m}{\mu}\right) + u_0 \cdot \frac{m}{\mu}.$$

По определению импульс частицы равен:

$p = mu.$

Тогда уравнение для координаты принимает вид:

$$q = q_0 - \frac{p}{\mu} + \frac{p_0}{\mu} = -\frac{1}{\mu}p + \left(q_0 + \frac{p_0}{\mu}\right). \quad (4)$$

Сравним уравнение (4) со стандартным уравнение для прямой линии:

$y = kx + b.$

Во- первых, убеждаемся, что фазовая траектория (4) является прямой линией, отсекающей на осях фазовых координат отрезки:

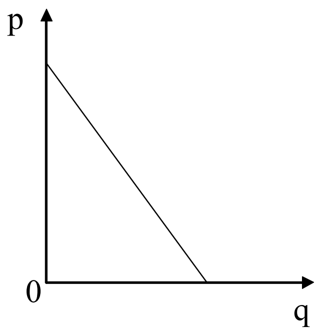

Рис. 11.

при $\begin{array}{ll} p = 0 & q = q_0 + \dfrac{p_0}{\mu}, \\ q = 0 & p = q_0\mu + p_0. \end{array}$

Построим график фазовой траектории движущейся частицы, на которую действует сила трения, пропорциональная скорости движения частицы. Угол наклона фазовой траектории к оси Oq равен $tg = -\dfrac{1}{\mu}.$

Задача №15

Выразить относительную флуктуацию энергии системы, подчиняющейся каноническому распределению Гиббса, через среднее значение энергии и модуль канонического распределения Θ.

Найти	δ_E
Дано	$\overline{E} = \int E\rho\, d\Gamma$

Решение

Задача имеет расчетный (математический) характер, поэтому СО выбирать не будем.

Воспользуемся формулами, определяющими как абсолютную, так и относительную флуктуации:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\overline{x})^2} = \overline{x^2 - 2x\cdot\overline{x} + \overline{x}^2} = \overline{x^2} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

Соответственно:

$$\delta_E = \frac{\sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2}}{\overline{E}},$$

где расчет величин, входящих в эти формулы, производится по стандартным формулам:

$$\overline{x} = \int x\rho\, d\Gamma \quad и \quad \overline{x^2} = \int x^2\rho\, d\Gamma.$$

Функция канонического распределения Гиббса имеет следующий вид:

$$\rho = C\cdot\exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right).$$

Постоянную C находим из условия нормировки:

$$\int \rho\, d\Gamma = 1,$$

откуда $$C = \frac{1}{\int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma}.$$

Введем новую переменную $\alpha = -\frac{1}{\Theta}$, тогда выражение для средней энергии можно представить следующим выражением:

$$\overline{E} = \frac{\int E \cdot \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma} = \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha}\int \exp(\alpha E) d\Gamma}{\int \exp(\alpha E) d\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int \exp(\alpha E) d\Gamma =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln Z = \Theta^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \ln Z.$$

Аналогично:

$$\overline{E^2} = \int E^2 \rho \, d\Gamma = \frac{\int E^2 \exp(\alpha E) d\Gamma}{\int \exp(\alpha E) d\Gamma} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\int \exp(\alpha E) d\Gamma}{\int \exp(\alpha E) d\Gamma} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} Z}{Z}.$$

Далее можно составить и выражение для относительной флуктуации. Однако, по условию задачи последнее выражение нужно представить как функцию средней энергии и модуля канонического распределения. Поэтому проведем расчет иначе.

Составим производную от средней энергии по модулю канонического распределения как по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \overline{E} = \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{\int E \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma} =$$

$$= \frac{\int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \int E \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma - \int E \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma \frac{\partial}{\partial \Theta} \int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma}{\left(\int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\Theta^2} \int E^2 \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma}{Z} - \frac{1}{\Theta^2} \left(\frac{\int E \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma}{Z} \right) = \frac{1}{\Theta^2}\left(\overline{E^2 - \overline{E}^2}\right).$$

Следовательно,

$\delta_E = \dfrac{\Theta}{\overline{E}}\sqrt{\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial\Theta}}$, что и требовалось получить.

Задача №16

Пользуясь тем, что микроскопический механизм броуновского движения представляет собой диффузию, обусловленную флуктуациями плотности, найти средне квадратичное смещение броуновской частицы за время t.

Найти	$\sqrt{\overline{\Delta x^2}}$
Дано	$\dfrac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$

Решение

Будем рассматривать некоторую статистическую систему, поэтому и СО назовем "Статистическая система".

Пусть в момент времени t_0 в слое с координатой x_0 имеется n_0 частиц и процесс диффузии происходит в направлении оси Ox. Тогда дифференциальное уравнение такой одномерной диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

где n - число частиц в слое с координатой x в момент времени t, D - коэффициент диффузии.

Частным решением этого уравнения является функция :

$$n(t) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right).$$

Упростим решение, приняв $x_0 = 0$:

$$n(t) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right).$$

По определению, с учетом сделанного упрощения,

$$\sqrt{\overline{\Delta x^2}} = \sqrt{\overline{(x - x_0)^2}} = \sqrt{\overline{x^2}}$$

Среднеквадратичное смещение найдем по общему правилу:

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dW,$$

где вероятность смещения частицы в интервале от x до $x+dx$ есть функция x и пропорциональна ширине интервала dx:

$$dW(x) = f(x)dx = \frac{n(x)}{n_0}dx.$$

Тогда выражение для среднеквадратичного смещения принимает расчетный вид:

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{n(t)}{n_0}dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)dx.$$

Воспользуемся значением несобственного интеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\alpha x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}.$$

Для искомой величины получаем:

$$\overline{x^2} = 2Dt.$$

Задача №17

Пользуясь распределением Гиббса для системы с переменным числом частиц, выразить $\overline{\Delta N^2}$ *через* $\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}$, *где* μ *- химический потенциал.*

Найти	$\overline{\Delta N^2}$
Дано	$\rho = \exp\frac{\varphi + \mu N - EN}{\Theta}.$

Решение

Так как система частиц не определена конкретно, то назовем СО “Лаборатория”.

Воспользуемся условием нормировки, чтобы выделить экспоненту, содержащую химический потенциал:

$$\exp\frac{\varphi}{\Theta}\sum\exp\frac{\mu N - EN}{\Theta} = 1.$$

Среднее значение для числа частиц определяется равенством:

$$\overline{N} = \sum N\rho = \exp\frac{\varphi}{\Theta}\sum N\exp\frac{\mu N - EN}{\Theta}.$$

Продифференцируем последнее выражение по μ:

$$\left(\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\Theta}\exp\frac{\varphi}{\Theta}\sum\left(N^2 + N\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)\exp\frac{\mu N - EN}{\Theta} =$$

$$= \frac{1}{\Theta}\left(\overline{N^2} + \overline{N}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right).$$

Из условия нормировки путем дифференцирования по μ аналогично найдем $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -\overline{N}.$

Тогда $\left(\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\Theta}\left(\overline{N^2} - \overline{N}^2\right) = \frac{\overline{\Delta N^2}}{\Theta}$,

откуда $\overline{\Delta N^2} = \Theta\left(\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right)_{T,V}$.

Задача №18

Найти полное число фотонов в единице объема равновесного излучения при температуре 2000K.

Найти	n
Дано	T=2000K

Решение

Фотоны являются квантами электромагнитного поля, заключенного в некоторой области. Поэтому СО назовем “Лаборатория”, где расположены источники равновесного излучения. и приемники (приборы) его обнаружения.

Будем рассматривать фотоны как частицы идеального газа, подчиняющегося статистике Бозе – Эйнштейна. Поэтому для числа частиц идеального газа, находящегося в единице объема, имеющими частоту в интервале от ν $до$ $\nu + d\nu$, можем использовать известную из лекционного курса формулу:

$$dn = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3\left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right)},$$

где учтено, что в каждом направлении могут распространяться два фотона с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, а также, что скорость движения фотонов равна скорости света в вакууме.

Полное число фотонов найдем, интегрируя предыдущее выражение в пределах от 0 до ∞:

$$n = \int_0^\infty dn = \frac{8\pi}{c^3}\int \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\frac{h\nu}{kT} - 1}.$$

Введем новую переменную $z = \frac{h\nu}{kT}$, чтобы свести интеграл к табличному несобственному интегралу. Тогда предыдущая формула примет вид:

$$n = \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\exp z - 1}. = \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3}\cdot 2{,}404\,.$$

Используя условие задачи и табличные значения констант, получаем ответ задачи:

$$n_{T=2000K} = 1{,}6 \cdot 10^{11} см^3.$$

Задача №19

Показать, исходя из корпускулярных представлений , что давление равновесного излучения равно u/3, где u – объемная плотность энергии равновесного излучения.

Найти	p
Дано	u

Решение

Свяжем СО с лабораторией, в которой происходит изучение равновесного излучения: СО “Лаборатория”.

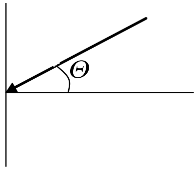

Рис. 12.

Число фотонов, которые имеют частоты в интервале от ν до $\nu + d\nu$ и соударяются за единицу времени с единичной площадкой, равно:

$$dN = c \cdot \cos\Theta \frac{d\Omega}{4\pi} dn,$$

где $\frac{d\Omega}{4\pi} dn$ - относительное число квантов, движущихся в телесном угле $d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\varphi$, $dn = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3\left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right)}$ - число фотонов, приходящихся на единицу объема с частотой в интервале от $\nu, \nu + d\nu$.

Тогда $dN = c\cos\Theta \frac{\sin\Theta d\Theta d\varphi}{4\pi} \cdot \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3\left[\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right]}.$

Величина импульса одного фотона равна $p = \frac{h\nu}{c}$. Но только те фотоны примут участие в создании давления, у которых есть составляющая скорости в направлении нормали (именно поэтому и появляется множитель $c \cdot \cos\Theta$). Давление можно найти, если проинтегрировать по всем дозволенным значениям углов Θ *и* φ, и по всем возможным значениям частоты.

Итак: $p = 2\int \frac{h\nu}{c} \cos\Theta dN,$

где множитель 2 появляется вследствие того, что фотоны абсолютно упруго отражаются от площадки.

Учитывая возможные значения пределов интегрирования, получаем:

$$p = \frac{2}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\Theta \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3\left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right)} = \frac{u}{3},$$

где использовано выражение для плотности излучения.

Задача №20

Найти число столкновений электронов со стенкой в нерелятивистском электронном газе при абсолютном нуле температуры.

Найти	n
Дано	$T=0K$ $\frac{v}{c} << 1$

Решение

СО свяжем с лабораторией, в которой наблюдается столкновение электронов, например, в катодной трубке: СО "Лаборатория".

Составим следующее (вполне очевидное) соотношение для числа электронов, летящих в некотором телесном угле к площадке. При этом мы учитываем, что электроны – фермионы и подчиняются статистике Ферми – Дирака. Кроме того, мы учли, что в одной фазовой ячейке могут находится два фермиона (электрона), спины которых противоположны, на площадку попадут только те электроны, у которых есть проекция скорости на нормаль (см. Задачу № 19).

Итак,

$$dn = v \cdot \cos\Theta \cdot S \cdot t \cdot \rho_{Ф-Д} \cdot \frac{d\Gamma}{h^3} \cdot 2.$$

При Т=0К функция $\rho_{Ф-Д} = 1$; $d\Gamma = p^2 dp \sin\Theta d\Theta d\varphi$, $v = \frac{p}{m}$.

Интегрируя в определенных пределах, получаем:

$$n = \frac{2}{mh^3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta \sin\Theta d\Theta \int_0^{p_0} p^3 dp \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{p_0^4 \pi}{2mh^3}.$$

Выразим импульс Ферми p_0 через энергию Ферми μ :

$$\mu = \frac{p_0^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p_0^4 = 4m^2 \mu^2.$$

Тогда $n == \frac{2m\mu^2 \pi}{h^3}$.

Нам известна связь энергии Ферми с плотностью фермионного газа:

$$\mu = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = \frac{h^4}{64m^2}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Окончательно для числа электронов, испытывающих столкновение со стенкой сосуда в нерелятивистском приближении при Т=0К получаем:

$$n = \frac{3^{\frac{4}{3}} h}{32m\pi^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Задача №21

Дать квантово-механическое обоснование принципа детального равновесия.

Найти	$\varpi_{ik} = \varpi_{ki}$
Дано	φ_i φ_k

Решение

Назовем СО "Квантово-механическая система", так как принцип детального равновесия имеет отношение к состоянию некоторой, вполне определенной, системы, например, к состоянию атома элемента в таблице Менделеева.

Для нахождения вероятности перехода из состояния i в состояние k нужно решить уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \qquad (1)$$

с начальным условием $\psi = \varphi_i$.

Квадрат модуля интеграла

$$\left|\int \varphi_k^* \psi d\tau\right|^2 \qquad (2)$$

определяет вероятность перехода системы за время t, φ_i ,φ_k – волновые функции конкретных квантовых состояний.

Сделаем инверсию времени $t \to -t$, что физически означает изменение направления процесса квантового перехода. Уравнение Шредингера запишется так:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \qquad (3)$$

или, учитывая эрмитовость и вещественность оператора Гамильтона и определение комплексно-сопряженной величины, предыдущее уравнение запишем так:

$$i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\hat{H}\psi^* \qquad (4)$$

при начальном условии $\psi^*=\varphi_i^*$.

Составим квадрат модуля интеграла

$$\left|\int\varphi_k\psi^*d\tau\right|^2, \qquad (5)$$

который определяет вероятность перехода из состояния i в состояние k при обращенном ходе времени или (что тоже самое) вероятность перехода из состояния k в состояние i при прямом ходе времени. Но выражения (5) и (2) совпадают, что и утверждает принцип детального равновесия.

Доказанный принцип справедлив и для классических систем, находящихся в статистическом равновесии.