

Глава IV

§4. Магнитное поле постоянного тока.

Магнитное поле является неотъемлемой частью постоянного тока, не существует тока, вокруг которого бы не было связанного (но не созданного) с током магнитного поля. Здесь проявляется та же физическая ситуация, как и в электростатике: заряд окружен (а не создаёт) электростатическим полем, не существует заряда без одновременно существующего поля.

Для решения задач по теме параграфа нам потребуются формулы из Главы I, §1, которые относятся к магнитному полю постоянного тока. Так уравнение (1.1) принимает вид

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \text{ и } \oint \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (4.1)$$

Уравнение (L3) сохраняет свой вид:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ и } \oint B_n dS = 0. \quad (4.2)$$

Справедливо и уравнение (1.6):

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \quad (4.3)$$

Сохраняются и граничные условия для векторов магнитного поля (1.11):

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (4.4)$$

и

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i. \quad (4.5)$$

Для математического упрощения решения задач вводится вспомогательная функция - векторный потенциал $\vec{A}$ следующим способом (1.12):

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (4.6)$$

Уравнение Даламбера (1.14) в случае стационарного процесса принимает вид:

$$\Delta \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \quad (4.7)$$

решение которого даётся формулой:

$$\text{для объёмных токов: } \vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dV, \quad (4.8)$$

$$\text{для линейных токов: } \vec{A} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r}. \quad (4.9)$$

Формула расчета вектора магнитной индукции $\vec{B}$ (формула Био-Савара-Лапласа) такова:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \frac{[\vec{r} d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (4.10)$$

Энергия магнитного поля может быть рассчитана по формулам

$$W = \frac{1}{2} I^2 L = \frac{1}{2} \int \vec{r} \vec{r} A_j dV = \frac{1}{2} \int \vec{r} \vec{r} H B dV \quad (4.11)$$

§4.1. Расчёт магнитного поля с помощью формулы

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \frac{[\vec{r} d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

Задача №14

Вычислить индукцию магнитного поля, окружающего прямой бесконечный ток I , на расстоянии r от оси тока.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\vec{B}(r)$
Дано	I
	$\mu = 1$
	r

Решение

Свяжем СО с линейным проводником. Начало системы координат можно выбирать в любой точке проводника в силу его бесконечной протяжённости.

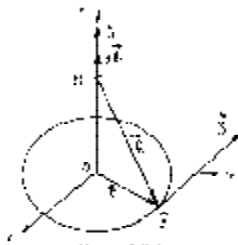


Рис. 19

Сделаем чертёж.

Выбираем ГМТ в виде окружности, расположенной в плоскости XOY и с центром на оси проводника, это упростит решение задачи, так как все точки окружности равноудалены от элемента тока $d\vec{l}$ (от точки M).

Из формулы записанной для данной задачи

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[\vec{r} d\vec{l} \times \vec{r}]}{R^3}, \quad (4.1.1)$$

определим как направление вектора $\vec{B}$ (по свойству векторного произведения), так и его величину:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{R^3} \left[d\vec{l} \vec{r} \right]. \quad (4.1.2)$$

Сделаем следующие преобразования (используя чертёж):

$$\vec{R} = \vec{r} - z\vec{k}; R = \sqrt{r^2 + z^2}; d\vec{l} = dz \cdot \vec{k}, \text{ где } \vec{k} - \text{орт оси } OZ.$$

$$\left[d\vec{l} \vec{R} \right] = \left[d\vec{l} \vec{r} \right] = r dz, \text{ что непосредственно следует из чертежа.}$$

Таким образом

$$B = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} \quad (4.1.3)$$

Интеграл в (4.1.3) - табличный и равен

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{z}{r^2 z \sqrt{1 + \frac{r^2}{z^2}}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{r^2}, \quad (4.1.4)$$

Объединяя формулы (4.1.3) и (4.1.4), получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4.1.5)$$

Задача №15

Линейный ток I циркулирует по окружности радиуса a . Вычислить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости тока на расстоянии x от центра тока.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	B
Дано	I
	a
	x
	$\mu = 1$

Решение

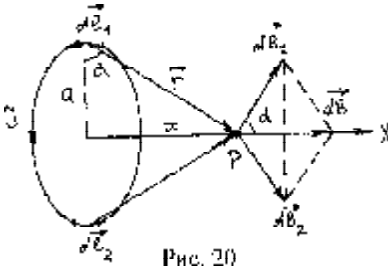
Свяжем СО с проводником, а начало системы координат совместим с центром окружности, совпадающей с круговым током.

Сделаем чертёж.

Решим эту задачу, используя формулу Био-Савара-Лапласа

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3} \quad (4.10):$$

Решение упростится, если мы воспользуемся симметрией элементов кругового тока по отношению к точке наблюдения P: противоположные эле-



менты кругового тока dl_1 и dl_2 дают одинаковые по величине вклады в магнитную индукцию в точке P:

$dB_1 \equiv dB_2$. Направление векторов

dB_1 и dB_2 определяется по правилу определения векторного произведения $[dl_1 \vec{r}]$ и $[dl_2 \vec{r}]$. Делаем дополнительные построения на чертеже. Результирующий вклад

элементов тока dl_1 и dl_2 в индукцию $d\vec{B}$ находим по правилу сложения векторов (по «правилу параллелограмма»). В данном случае параллелограмм - ромб. Таким образом, нам необходимо определить лишь $d\vec{B}$, спроектировать этот вектор на ось OX и результат удвоить, в этом случае мы получим величину dB , а его направление совпадает с направлением оси OX.

По условию задачи плоскость кругового тока перпендикулярна оси OX, следовательно, и векторы dl_1 и $\vec{r}$ также взаимно перпендикулярны. Это позволяет нам рассчитать величину dB_1 :

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl_1}{r^2}. \quad (4.1.6)$$

Величина dB равна

$$dB = 2dB_1 \cdot \cos a = 2dB_1 \frac{a}{r} = 2dB_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Итак,

$$dB = 2 \cdot \frac{\mu_0 I a dl_1}{4\pi \sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

Полную индукцию магнитного поля кругового тока в точке Р найдём, интегрируя это выражение (суммируя вклады противоположных пар элементов тока Idl_1). Однако вспомним, что мы уже учли вклад противоположного элемента тока Idl_2 , поэтому интегрировать будем лишь по половине окружности, длина которой равна πa (а не $2\pi a$):

$$B = 2 \frac{\mu_0 I a}{4\pi \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \int_0^{\pi a} dl_1 = \frac{\mu_0 I a^2}{2 \sqrt{(a^2 + x^2)^3}}. \quad (4.1.7)$$

Эта формула определяет величину индукции кругового тока в любой точке, находящейся на перпендикуляре к плоскости тока, проходящем через центр окружности этого тока. В том числе эта формула определяет индукцию в центре кругового тока, когда $x \equiv 0$:

$$B_{x=0} = \frac{\mu_0 I a^2}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a}. \quad (4.1.8)$$

§4.2. Расчёт магнитного поля с помощью первого уравнения Максвелла для постоянного тока.

Задача №16

Вдоль бесконечного цилиндрического проводника радиуса a течёт постоянный ток I , равномерно распределённый по сечению проводника. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндра.

Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, обсудим ещё раз чрезвычайно важный физический вопрос. Как правильно говорить: «магнитное поле, созданное током» или «магнитное поле тока (окужающее ток)». С подобной проблемой мы встретились ещё в электростатике («поле, созданное зарядом» или «поле заряда»). В электростатике вопрос был рассмотрен подробно и решен однозначно: не существует заряда без электрического поля, поэтому неверно считать заряд «причиной», а его поле «следствием», заряд и его поле сосуществуют, нет заряда без его поля.

Точно также решается проблема электрического тока и его магнитного поля. Здесь также нет «причины» и «следствия», электрический ток и его магнитное поле сосуществуют, составляя единый физический объект. Рассматривая полное первое уравнение Максвелла, мы отмечали, что и ток сме-

щения окружен своим магнитным полем. Можно сказать, что вокруг любого по своей природе тока существует магнитное поле. Вместе с тем следует подчеркнуть, что обратное утверждение (если есть магнитное поле, то есть и ток) верно лишь для стационарных процессов. В случае переменных процессов магнитное поле может возбуждаться меняющимся во времени электрическим полем, что и происходит в электромагнитной волне.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	H_e, H_i
Дано	I a

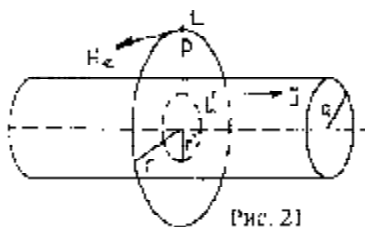
Решение

Свяжем систему отсчёта с проводником. Сделаем чертёж.

При интегрировании 1-го уравнения Максвелла важно удачно выбрать контур интегрирования. (Вспомните, что в электростатике подобное замечание мы делали при

использовании метода теоремы Гаусса).

Воспользуемся симметрией задачи. Учтём, что проводник бесконечно длинный. Поэтому, используя правило буравчика, определим направление вектора напряжённости магнитного поля. Согласно договорённости силовые линии магнитного поля располагаются в плоскости, перпендикулярной направлению элемента тока. А в нашем случае все элементы проводника сонаправлены, поэтому в любой плоскости, перпендикулярной к проводнику, располагаются напряжённости магнитного поля, в каждой точке которых вектор напряжённости магнитного поля направлен по касательной.



Разделим решение задачи на два этапа:

определение вектора напряжённости вне и внутри проводника.

В силу изотропности пространства на равном расстоянии от оси проводника величина магнитного поля одинакова. Это позволяет тотчас же взять интеграл в левой стороне 1-го уравнения

$$\oint_L H_l dl = H_l \oint_L dl = H_e \cdot 2\pi r$$

Правая сторона 1-го уравнения определяет полный ток, текущий по проводнику, так как контур интегрирования охватывает всё сечение проводника.

Итак,

$$H_e \cdot 2\pi r = I \quad (4.2.1)$$

Откуда вне проводника величина вектора напряженности определяется по формуле

$$H_e = \frac{1}{2\pi r} \quad (4.2.2)$$

Направление этого вектора, как было сказано выше, определяется по правилу буравчика (или правилу «обхвата», или другим способом).

Для внутренней области проводника применим тот же метод, однако учтём, что коаксиальный контур интегрирования L' имеет радиус r' , меньший радиуса проводника a . Поэтому через площадку, охватываемую контуром L' , будет протекать лишь часть полного тока:

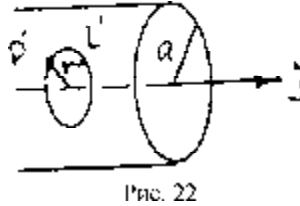


рис. 22

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r'^2}{\pi a^2}, \quad \text{откуда} \quad I' = I \frac{r'^2}{a^2}.$$

Тогда интегрирование 1-го уравнения даёт следующее равенство:

$$\oint_{L'} H_i dl = \int \frac{j_n dS}{\pi'^2} = I',$$

$$H_i \cdot 2\pi r' = I' = I \frac{r'^2}{a^2},$$

$$H_i = I \frac{r'}{2\pi a^2} \quad (4.2.3)$$

Убедимся, что на поверхности проводника величина напряженности магнитного поля не испытывает скачка:

$$H_e|_{r=a} = H_i|_{r'=a} \quad (4.2.4)$$

$$\frac{I}{2\pi a} = I \frac{a}{2\pi a^2} = I \frac{1}{2\pi a} \quad (4.2.5)$$

Изобразим графически закон изменения величины H в пределах от 0 до ∞

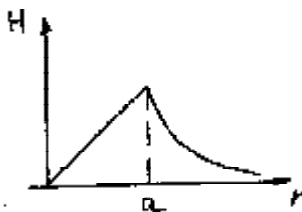


Рис. 23

Задача №17

Вычислить поле внутри достаточно длинной, тонкой цилиндрической катушки, на единицу длины которой приходится n витков проволоки с током I .

Запишем условие задачи кратко.

Найти	H_e, H_i
Дано	n витк./ед.дл. $I_i = I$

Решение

Свяжем СО с катушкой. Сделаем чертёж.

Хотя катушка обладает осевой симметрией, оказывается, что контур интегрирования нельзя брать в виде концентрических окружностей, располага-

ющихся вне и внутри цилиндра с центрами на оси цилиндра. В этом случае окажется, что плоскость контура не будет пересекаться витками тока и отсюда следует, вопреки реальности, что внутри катушки магнитного поля нет.

Поэтому выберем контур интегрирования так, чтобы витки проволоки пересекали плоскость, охваченную контуром интегрирования. Выбранный контур изображён на рисунке пунктиром. Участки AB и CD уходят в бесконечность и там замыкаются.

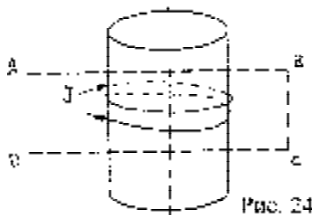


Рис. 24

Запишем формулу 1-го уравнения Максвелла

$$\oint H_l dl = \sum I_i \text{ или } \oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i.$$

На участках АВ и CD скалярное произведение $\vec{H} d\vec{l}$ равно нулю в силу взаимной перпендикулярности векторов $\vec{H}$ и $d\vec{l}$ (направление вектора $\vec{H}$ определяем по правилу «буравчика»); суммарный ток, пронизывающий площадку, ограниченную контуром ABCD, равен нулю, поэтому исходное уравнение принимает вид:

$$H_e^{BC} \cdot (BC) + H_e^{AD} \cdot (AD) = 0$$

Но в бесконечности магнитное поле равно нулю: $H_e^{AD} \equiv 0$, поэтому предыдущее равенство упрощается $H_e^{BC} \cdot (BC) = 0$.

Так как $BC \neq 0$, то $H_e^{BC} \equiv 0$.

Расположение участка контура BC не определено, лишь бы он был параллелен образующей цилиндра. Поэтому можно утверждать, что вне катушки магнитного поля нет: $H_e \equiv 0$.

Для нахождения величины магнитного поля внутри катушки, выбираем контур интегрирования так, как изображено на рисунке 25.

Точки А и D по-прежнему находятся в бесконечности. Точки Е и F внутри катушки (не обязательно на оси, в этом проявляется дополнительное условие задачи: достаточно длинная и тонкая катушка, поэтому расположение участка контура EF внутри катушки ничем не ограничено, все положения равноправны, магнитное поле считается однородным).

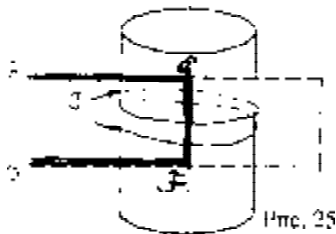
От левой части уравнения Максвелла (с учетом рассуждений, проведённых выше) остаётся лишь одно слагаемое от участка EF:

$$H_i \cdot (EF) = \sum I_i = (EF) \cdot n \cdot I;$$

После упрощения этого равенства, получаем (так как каждый виток пересекает площадь AEDFA лишь один раз): $H_i = nI$.

Величина (nI) в электротехнике называется «числом Ампер-витков».

Конечно, если бы катушка была конечной длины, сравнимой с её диаметром, расчёт существенно усложнился бы как из-за влияния концов катушки, так из невозможности считать поле внутри катушки однородным. Но



для оценочных расчётов полученная формула используется часто.

Решим ещё одну задачу, используя 1-е уравнение Максвелла для стационарных токов.

Задача №18

На тор радиуса R (с круговым сечением радиуса a) намотано N витков проволоки, по которой течёт ток I . Считая проволоку достаточно тонкой, определить напряженность магнитного поля указанного соленоида.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	H_{1e}, H_{2e}, H_i
Дано	N I R a $a \ll R$

Решение

Свяжем СО с соленоидом (тором). Сделаем чертёж.

Область 1 находится вне тора снаружи $r_1 > R$, область 2 находится вне тора, но $r_2 < R$, область i находится в объёме тора $r_i \sim R$. Вот почему нам необходимо найти H_{1e} и H_{2e} и только одну

напряженность H_i .

Из всевозможных вариантов выбора контуров интегрирования выберем такие, чтобы они лежали на плоскости, рассекающей тор на две круговые половинки. Учитывая форму тора, выберем контуры в виде окружностей с центром в точке O .

Для внешней области 1:

$$\oint_{L_1} H_{1e} dl = \sum I_i$$

Так как каждый виток пересекает плоскость контура дважды, то суммарный ток от всех витков равен нулю. Учитывая изотропность пространства в плоскости контура, выносим H_{1e} как постоянную величину за знак интеграла. Тогда

$$H_{1e} \cdot 2\pi r_1 = 0.$$

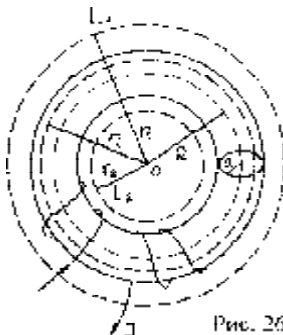


Рис. 26

Откуда непосредственно следует, что вне тора в области 1 магнитного поля нет.

При рассмотрении контура L_2 в области 2 решение существенно упрощается, так как плоскость, охваченная контуром L_2 , не пересекается витками с током.

А для левой стороны 1-го уравнения Максвелла проводим те же рассуждения, которые мы провели для левой стороны уравнения в области 1.

Отсюда следует, что и в области 2 магнитного поля нет.

Очевидно, что всё магнитное поле тора сосредоточено во внутренней области. Учтём упрощающее условие: $\alpha \ll R$. Поэтому будем считать, что внутри тора магнитное поле однородно по всему сечению тора.

Рассмотрим обе стороны 1-го уравнения Максвелла для внутренней области тора:

$$\oint_{L_i} H_i dl = \sum I_i$$

Учитывая сделанное выше упрощение о размерах сечения тора, получаем

$$\oint_{L_i} H_i dl = H_i \oint_{L_i} dl = H_i \cdot 2\pi r_i$$

Площадка, ограниченная контуром L_i , каждым витком пересекается лишь по одному разу. Поэтому суммарный ток $\sum I_i = N \cdot I$.

$$\text{Итак, } H_i \cdot 2\pi r_i = N \cdot I, \quad \text{откуда } H_i = \frac{NI}{2\pi r_i}$$

§4.3. Решение уравнений Максвелла с использованием векторного потенциала.

Ранее уже говорилось, что ни скалярный, ни векторный потенциалы не имеют физического смысла и вводятся в теорию как вспомогательные величины, позволяющие упростить решения самих уравнений Максвелла. Векторный потенциал постулируется следующим равенством

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (4.3.1)$$

которое определяет векторный потенциал неоднозначно ($\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \chi$ определяет то же магнитное поле $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A} + \text{rot grad} \chi = \text{rot} \vec{A}$), именно по этой причине и говорится, что векторный потенциал не имеет непосред-

редственного физического смысла. Решим ряд задач для иллюстрации использования векторного потенциала.

Задача №19

Рассчитать магнитное поле бесконечного прямого тока I , вычисляя сначала векторный потенциал $\vec{A}$, а затем индукцию поля по формуле (4.3.1).

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\vec{A}, \vec{B}$
Дано	I $-\infty < z < +\infty$

току, его магнитное поле одинаково. Поэтому выберем начало координат в любой точке проводника, ось OZ направим вдоль тока, а плоскость XOY расположим перпендикулярно току. Сделаем чертёж.

Для расчёта величины и направления векторного потенциала линейного тока имеем формулу (4.9):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R}. \quad (4.3.2)$$

Из (4.3.2) следует, что вектор $\vec{A}$ направлен вдоль тока I , так как направление элемента тока $d\vec{l}$ совпадает с направлением оси OZ.

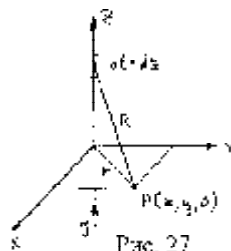
Из чертежа следует, что $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Таким образом нам необходимо найти лишь одну отличную от нуля компоненту векторного потенциала A_z :

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4.3.3)$$

Так как верхняя и нижняя ветви тока подобны, то выражение (4.3.3) можно записать так:

Решение

Свяжем систему отсчёта с проводником. В силу бесконечности проводника в любой плоскости, перпендикулярной



$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \text{ при } L \rightarrow \infty.$$

Интеграл $\int_0^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ является табличным и равен:

$$\int_0^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + r^2} \right) \Big|_0^L = \ln \left(L + \sqrt{L^2 + r^2} \right) - \ln \left(x^2 + y^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Следовательно,

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \ln \left(L + \sqrt{r^2 + L^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2 \right) \right\}, \quad (4.3.4)$$

Из (4.3.4) видно, что при $L \rightarrow \infty$ A_z также стремится к бесконечности, что и подтверждает отсутствие у векторного потенциала непосредственного физического смысла. Воспользуемся формулой (4.3.1) для нахождения физической характеристики магнитного поля.

Запишем эту формулу в виде определителя. Это позволит нам сразу установить, какие компоненты вектора $\vec{B}$ отличны от нуля.

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{r} & \vec{r} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{r} & \vec{r} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = i \frac{\partial A_z}{\partial y} - j \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (4.3.5)$$

Из (4.3.5) следует, что вектор $\vec{B}$ располагается в плоскости XOY:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (4.3.6)$$

В силу симметричности зависимости A_z от x и y , нам достаточно составить одну из производных $\frac{\partial A_z}{\partial y}$ или $\frac{\partial A_z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} A_z = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \left(L + \sqrt{x^2 + y^2 + L^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2 \right) \right) \right]_{L \rightarrow \infty} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{L + \sqrt{x^2 + y^2 + L^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + L^2}} - \frac{2y}{2(x^2 + y^2)} \right]_{L \rightarrow \infty} =$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}.$$

Соответственно $\frac{\partial}{\partial x} A_z = -\frac{x}{r^2}.$

Таким образом, компоненты вектора $\vec{B}$ будут равны

$$B_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2} \quad B_y = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}, \quad (4.3.7)$$

а величина этого вектора (по теореме Пифагора)

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4.3.8)$$

Как и следовало ожидать, получено то же выражение для величины вектора $\vec{B}$, что и в задаче №14.

Представляет интерес установить характер линий вектора $\vec{B}$. Ведь нам известно, что линии вектора $\vec{B}$ - замкнутые линии. И в данной задаче в силу изотропности пространства в плоскости XOY и бесконечной длины проводника силовые линии вектора $\vec{B}$ должны образовывать семейство концентрических окружностей, располагающихся в плоскости XOY с центром на оси тока.

Составим уравнение силовых линий (учитывая, что они расположены в плоскости XOY);

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} \quad \text{или} \quad -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2} = \frac{dy}{\mu_0 I x / 2\pi r^2}, \quad \text{откуда} \quad xdx + ydy = 0.$$

Элементарное интегрирование определяет уравнение силовых линий вектора магнитной индукции:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \text{const} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = C_i. \quad (4.3.9)$$

В зависимости от численного значения константы C_i мы и получаем

семейство концентрических окружностей, что свидетельствует о вихревом характере магнитного поля.

Как было замечено в разделе «Электростатика», силовые линии - это не физические, а геометрические объекты. С помощью силовых линий нам удаётся графически изобразить невидимое глазом магнитное поле. В связи с этим замечанием обращаем внимание на отсутствие физического смысла в таких выражениях: «проводник пересекает силовые линии...» или «силовые линии пронизывают площадку...». Эти фразы являются лишь образными.

Рассмотрим более сложную задачу с применением векторного потенциала.

Задача №20

Вычислить векторный потенциал и индукцию магнитного поля кругового тока I радиуса a на больших расстояниях от него при $R \gg a$.

Данная задача является более общим вариантом задачи №15, в которой индукция кругового тока определялась лишь на перпендикуляре к плоскости тока, проходящего через центр круга.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\vec{A}, \vec{B}$
Дано	I a $R \gg a$

Решение
Свяжем СО с электрической схемой, исключаем из рассмотрения добавочное магнитное поле, которое было бы обусловлено перемещением проводника с током. Сделаем чертёж.

Для решения задачи нам необходимо использовать формулы (4.9) и (4.6).

Для решения задачи нам необходимо использовать формулы (4.9) и (4.6).

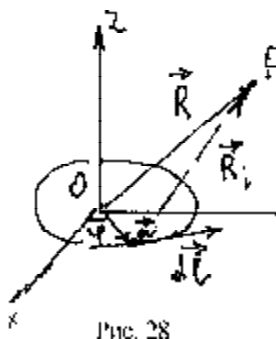
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R_i} \quad (4.9)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Из чертежа следует

$$\vec{R}_i = \vec{R} - \vec{a} \quad \text{или} \quad R_i^2 = R^2 - 2R\alpha + \alpha^2 \quad (4.3.10)$$

Воспользуемся условием задачи $R \gg a$ и разложим правую сторону



равенства (4.3.10) в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\alpha^2}{R^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{R^2} - \frac{\alpha^2}{2R^2} \right). \quad (4.3.11)$$

Выражение (4.9) представим в виде двух слагаемых

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} \right) \oint d\mathbf{l} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}. \quad (4.3.12)$$

Учитывая, что суммарное перемещение (перемещение-вектор!) по замкнутому пути равно нулю, получаем $\oint d\mathbf{l} \equiv 0$, и тогда

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}. \quad (4.3.13)$$

Из чертежа следует, что

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= -dl \cdot \sin \varphi \cdot \mathbf{i} + dl \cdot \cos \varphi \cdot \mathbf{j} = (-\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j}) \cdot a d\varphi; \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} &= a(\cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j}); \\ \mathbf{R} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Составим

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) &= R_x a_x + R_y a_y + R_z a_z = xa \cdot \cos \varphi + ya \cdot \sin \varphi + z \cdot 0 = \\ &= xa \cdot \cos \varphi + ya \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} (x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + y \cdot \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^3} \cdot \pi y = -\frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^3} \cdot y \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Аналогично

$$A_y = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} (x \cdot \cos^2 \varphi + y \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi) d\varphi = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^3} \cdot x. \quad (4.3.15)$$

$$A_z = 0 \quad (4.3.16)$$

Имея компоненты векторного потенциала (4.3.14) и (4.3.15), можно составить выражение для самого вектора $\overset{\bullet}{A}$. Действительно, вектор

$$\overset{\mathbf{r}}{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} [\overset{\mathbf{r}}{S} \overset{\mathbf{r}}{R}], \quad (4.3.17)$$

Где $\overset{\mathbf{r}}{S} = \pi a^2 \overset{\mathbf{r}}{k}$ имеет как раз компоненты (4.3.14) и (4.3.15), вектор $\overset{\mathbf{r}}{k}$ - единичный орт на оси OZ.

Выражение (4.3.17) можно записать иначе, если ввести магнитный момент кругового тока (по определению):

$$\overset{\mathbf{r}}{M} = I \overset{\mathbf{r}}{S} \quad (4.3.18)$$

Тогда

$$\overset{\mathbf{r}}{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}]}{R^3}. \quad (4.3.19)$$

Воспользуемся формулой (4.6), определяющей введение векторного потенциала:

$$\begin{aligned} \overset{\mathbf{r}}{B} = \text{rot} \overset{\mathbf{r}}{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left[\frac{[\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}]}{R^3} \right] \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\text{grad} \frac{1}{R^3} [\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}] + \frac{1}{R^3} \text{rot} [\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}] \right]. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

На основании формул векторного анализа

$$[\overset{\mathbf{r}}{A} [\overset{\mathbf{r}}{B} \overset{\mathbf{r}}{C}]] = \overset{\mathbf{r}}{B} (\overset{\mathbf{r}}{A} \overset{\mathbf{r}}{C}) - \overset{\mathbf{r}}{C} (\overset{\mathbf{r}}{A} \overset{\mathbf{r}}{B}), \quad \text{grad} \varphi(R) = \frac{d\varphi}{dR} \cdot \frac{\overset{\mathbf{r}}{R}}{R} = \frac{d\varphi}{dR} \nabla R,$$

$$\text{rot} [\overset{\mathbf{r}}{A} \overset{\mathbf{r}}{B}] = (\overset{\mathbf{r}}{B} \nabla) \overset{\mathbf{r}}{A} - (\overset{\mathbf{r}}{A} \nabla) \overset{\mathbf{r}}{B} + \overset{\mathbf{r}}{A} \text{div} \overset{\mathbf{r}}{B} - \overset{\mathbf{r}}{B} \text{div} \overset{\mathbf{r}}{A}$$

члены выражения (4.3.20) можно представить так:

$$\left[\text{grad} \frac{1}{R^3} [\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}] \right] = \frac{3(\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}) \overset{\mathbf{r}}{R}}{R^5} - \frac{3\overset{\mathbf{r}}{M}}{R^3},$$

$$\text{rot} [\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}] = (\overset{\mathbf{r}}{R} \nabla) \overset{\mathbf{r}}{M} - \overset{\mathbf{r}}{R} \text{div} \overset{\mathbf{r}}{M} + \overset{\mathbf{r}}{M} \text{div} \overset{\mathbf{r}}{R} - (\overset{\mathbf{r}}{M} \nabla) \overset{\mathbf{r}}{R}$$

Учитывая, что дифференцирование производится по координатам точки наблюдения Р (в которой определяется вектор $\overset{\mathbf{r}}{B}$), а вектор $\overset{\mathbf{r}}{M}$ от этих координат не зависит, то

$$(\overset{\mathbf{r}}{R} \nabla) \overset{\mathbf{r}}{M} = 0, \quad \text{div} \overset{\mathbf{r}}{M} = 0, \quad (\overset{\mathbf{r}}{M} \nabla) \overset{\mathbf{r}}{R} = \overset{\mathbf{r}}{M}, \quad \text{rot} [\overset{\mathbf{r}}{M} \overset{\mathbf{r}}{R}] = 2\overset{\mathbf{r}}{M}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля $\vec{B}$ кругового тока на больших расстояниях от него, определяется формулой

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{M}\vec{R})\vec{R}}{R^2} - \vec{M} \right\}. \quad (4.3.21)$$

Покажем, что полученная формула (4.3.21) для вектора $\vec{B}$ на больших расстояниях от кругового тока содержит в себе частный случай, рассмотренный в задаче №15.

Будем считать, что векторы $\vec{R}$ и $\vec{M}$ параллельны, тогда $(\vec{M}\vec{R}) = M \cdot R$.

Величина вектора $\vec{B}$ на оси кругового тока будет равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3M \cdot R \cdot R}{R^2} - M \right\} = \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3}.$$

Мы получили формулу (4.1.7) при условии $x = R \gg a$.

§4.4. Сила Ампера. Энергия магнитного поля.

Задача №21

Определить силу, с которой бесконечный прямой ток I действует на прямоугольный контур $ABCD$, лежащий с ним в одной плоскости и несущий ток I_1 .

Запишем условие задачи кратко.

Найти	F
Дано	I
	I_1
	a
	b
	x

Решение

Свяжем СО с прямым проводом, что избавит нас от учёта влияния движения проводников на силу их взаимодействия.

Сделаем чертёж.

1-й способ решения.

Результирующая сила взаимодействия сторон контура с током I складывается из сил взаимодействия каждой стороны. Но на участки AB и CD действуют равные и противоположно направ-

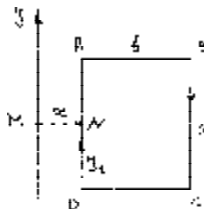


Рис. 29

ленные силы, что легче всего установить, используя «правило левой руки» и учитывая одинаковость расположения сторон AB и CD по отношению к току I.

Силу, действующую на сторону DA, можно рассчитать по формуле

$$F_1^{DA} = I_1 \int_D^A \left[d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right] = I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \int_D^A dl = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi x} . \quad (4.4.1)$$

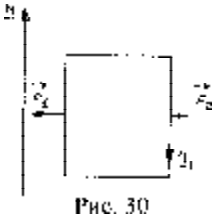


Рис. 30

Направление этой силы снова определяем по «правилу левой руки».

Сторона DC будет испытывать

силу F_2 , меньшую силы F_1 , так как эта сторона находится дальше от тока I:

$$F_2 = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi(x+b)} .$$

Равнодействующая сила будет равна разности F_1 и F_2 и вызовет притяжение рамки к прямому бесконечному току I.

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 a I I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} \right) = \frac{\mu_0 a I I_1 b}{2\pi x(x+b)} . \quad (4.4.2)$$

2-й способ решения.

Величину действующей силы можно рассчитать по формуле

$$F = - \frac{\partial W}{\partial x} , \quad (4.4.3)$$

где $W = -I_1 \Phi$ - энергия рамки с током I_1 , которой она обладает, будучи помещенной, в магнитное поле другого тока I; Φ - магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную контуром ABCD, поля тока I.

По определению

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int B_n dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_x^{x+b} \frac{adx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \cdot \ln \frac{x+b}{x} .$$

Составим

$$F = -I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \frac{x}{x+b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x+b}{x} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi} I_1 \frac{x}{x+b} \cdot \frac{x-(x+b)}{x^2} = -\frac{\mu_0 a b I_1}{2\pi x(x+b)}.$$

Мы снова получаем формулу (4.4.2) как и должно быть. Знак «минус» указывает на притяжение рамки ABCD с током I_1 к прямому бесконечному току I .

Задача №22

Внутри бесконечной проводящей цилиндрической оболочки радиуса a_1 находится коаксиальный с ней провод радиуса a_2 . По оболочке течёт ток I , равномерно распределённый по её поверхности. По проводу течёт равный, но противоположно направленный ток, равномерно распределённый по сечению провода. Определить энергию магнитного поля и самоиндукцию единицы длины указанного кабеля, считая его достаточно длинным.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	W, L
Дано	$I_1 = I_2 = I$
	a_1
	a_2

Решение

Выберем СО «Цилиндрический проводник», избавляясь тем самым от учёта движения проводника (или необходимости введения дополнительного условия, что проводник неподвижен). Сделаем чертёж.

Для решения данной задачи воспользуемся результатами

задачи №16, в которой мы определили напряженность магнитного поля внутри и вне цилиндрического проводника, по которому течёт ток, равномерно распределённый по сечению проводника (как и в данной задаче).

Вне цилиндрической поверхности магнитного поля нет, оно компенсируется от равных и противоположно направленных токов, текущих по поверхности проводящего цилиндра и по сечению провода (нужно помнить, что расстояние до точки наблюдения отсчитывается для обоих токов от оси проводника перпендикулярно к ней).

Таким образом, магнитное поле сосредоточено внутри цилиндрической поверхности и обусловлено лишь током, текущим по проводнику.

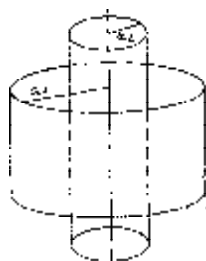


Рис. 31

Итак,

$$H_i = \frac{1}{2\pi\alpha_2^2} r, \quad (0 \leq r \leq a^2) \quad (4.4.2)$$

$$H_e = \frac{I}{2\pi r}, \quad (a_2 \leq r \leq a_1) \quad (4.4.3)$$

Для расчёта энергии магнитного поля воспользуемся двумя разными формулами

$$W = \frac{1}{2} I^2 L, \quad \text{и} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \mu_0 H^2 dV = \frac{1}{2} \int \mu_0 H_i^2 dV + \frac{1}{2} \int \mu_0 H_e^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \int_0^{a_2} H_i^2 \cdot 2\pi r dr + \int_{a_2}^{a_1} H_e^2 \cdot 2\pi r dr \right\} l. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Подставляя в (4.4.5) значения H_i и H_e (формулы (4.4.2) и (4.4.3)), интегрируя, получим

$$W = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{a_1}{a_2} \right) l. \quad (4.4.6)$$

Сравнивая выражения (4.4.6) и (4.4.4), получаем для коэффициента самоиндукции (в расчёте на единицу длины):

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{a_1}{a_2} \right). \quad (4.4.7)$$

§4.5. Явление электромагнитной индукции.

До сих пор мы решали задачи, касающиеся статических или стационарных процессов. При этом подчёркивалось, что неподвижные заряды (в ИСО) окружены статическим электрическим полем. При переходе в другую ИСО, относительно которой те же заряды окажутся движущимися (иначе говоря, мы фиксируем наличие электрического постоянного тока), с помощью приборов можно зафиксировать не только электрическое, но и магнитное поле. Однако, это не означает, что только благодаря переходу в движущуюся ИСО мы смогли породить материю, назвав её магнитным полем.

В действительности существует единое электромагнитное поле, которое в зависимости от условий наблюдения и используемых приборов проявляет себя либо электрическим, либо магнитным, либо и тем и другим воздействием. Если в одной ИСО существует электромагнитное поле, то не удастся его уничтожить лишь переходом в другую ИСО.

Именно взаимосвязь электрического тока с его магнитным полем обнаружил Эрстед в 1820 году. Через 10 лет кропотливых экспериментов, руководствуясь идеей о взаимосвязи электрических и магнитных явлений, Фарадею удалось привести в движение электрические заряды, находящиеся внутри проводника, воздействуя на них магнитным полем. Общая формулировка явления электромагнитной индукции, как было названо явление, открытое Фарадеем, представлена в формуле 2-го уравнения Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (4.5.1)$$

$$\text{где} \quad \Phi = \int B_n dS, \quad (4.5.2)$$

физический смысл которого можно сформулировать так: в замкнутой цепи возбуждается ЭДС индукции тогда, когда происходит изменение во времени потока вектора магнитной индукции через площадку, охватываемую контуром интегрирования. Максвелл обобщил эту формулировку, приняв за контур интегрирования не только реальный проводник, но любой замкнутый контур. Естественно, электрический ток возникает при условии наличия свободных электрических зарядов. Знак «минус» обусловлен выполнением закона сохранения и превращения энергии и связывается с так называемым «правилом Ленца».

Решим пару задач на явление электромагнитной индукции.

Задача №23

Прямой провод длины и направления $\hat{l}$ движется со скоростью $\hat{v}$ в однородном магнитном поле $\hat{B}$; его концы соединены посредством подвижных контактов с неподвижным проводником, который вместе с ним образует замкнутую цепь. Какова ЭДС индукции в этой цепи?

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\mathcal{E}_{\text{инд}}$
Дано	$\vec{l}$ $\vec{u}$ $\vec{B}$

Решение

Выберем СО «Лаборатория», включив в неё в качестве тела отсчёта неподвижный проводник, с которым последовательно включены гальванометр (для обнаружения возникновения тока), полость, вдоль которых перемещается один из участков замкнутой цепи. Сделаем чертёж.

1-й способ решения задачи.

В данной задаче изменение потока вектора магнитной индукции происходит благодаря изменению величины площадки, охваченной контуром с одной подвижной стороной АС. Зная скорость движения проводника,

можно определить величину $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = B \frac{\partial S}{\partial t}$,

где ∂S - изменение площади контура

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{l \cdot u \cdot t}{t} = lu, \quad (4.5.3)$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \left| -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| = luB, \quad (4.5.4)$$

где учтена взаимная перпендикулярность векторов $\vec{u}$ и $\vec{B}$. Направление тока определяем по «правилу правой руки».

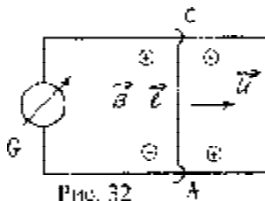


Рис. 32

2-й способ решения задачи.

Как только проводник АС начнёт движение со скоростью $\vec{u}$, начнётся перемещение зарядов вдоль проводника с некоторой скоростью $\vec{v}$. Поэтому заряды будут двигаться с результирующей скоростью $\vec{u} + \vec{v}$.

На всякий заряд, движущийся во внешнем магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{u} + \vec{v}, \vec{B}]. \quad (4.5.5)$$

Точно такое же воздействие окажет электрическое поле, напряженность которого можно рассчитать по формуле

$$\frac{\mathbf{r}}{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = [\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{B}]. \quad (4.5.6)$$

Возникающую в цепи ЭДС можно рассчитать так

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{L}, \quad (4.5.7)$$

так как именно поле $\mathbf{E}$ будет воздействовать на заряды в проводнике, в результате чего возникнет электрический ток.

Составим выражения для $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ (4.5.7), подставив значение $\mathbf{E}$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint [\mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{B}] d\mathbf{L} = \oint [\mathbf{v}, \mathbf{B}] d\mathbf{L} + \oint [\mathbf{u}, \mathbf{B}] d\mathbf{L}.$$

В первом слагаемом совершим циклическую перестановку, исходя из свойства смешанного произведения векторов. Но $[d\mathbf{L}, \mathbf{v}]$ во всей цепи равно нулю из-за параллельности этих векторов. Итак,

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint [\mathbf{u}, \mathbf{B}] d\mathbf{L}. \quad (4.5.8)$$

В рассматриваемой задаче $\mathbf{u} = \text{const}$, $\mathbf{B} = \text{const}$, а движущимся является лишь участок цепи l . Поэтому интегрирование в (4.5.8) производится элементарно:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = [\mathbf{u}, \mathbf{B}] l = luB. \quad (4.5.9)$$

Естественно, 2-й способ решения задачи даёт тот же результат, что и 1-й способ с одним дополнительным моментом: направление ЭДС индукции и индукционного тока определяется по правилу определения направления векторного произведения двух векторов $[\mathbf{u}, \mathbf{B}]$, на нашем чертеже ток (и ЭДС) направлены от A к C .

Задача №24

Показать, что при изменении во времени радиального магнитного поля, у которого $B_x = B_y = 0$; $B_z = B(r, t)$, возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности с центрами, лежащими на оси магнитного поля.

Данная задача имеет практическое применение, так как именно такой способ возбуждения вихревого магнитного поля применяется в ускорителях элементарных частиц, например, в бетатроне. В определённом смысле эта

идея «работает» и в трансформаторе.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\vec{E}$
Дано	$B_x = B_y = 0$ $B_z = B(r, t)$

Решение

Назовем СО «Электромагнит», так как, действительно, в таком физическом приборе протекают процессы, рассматриваемые в задаче.

Сделаем чертёж.

На нём изображен ферромагнитный сердечник, на который намотаны витки проводника. В цепь подаётся меняющийся во времени (нарастающий или убывающий) электрический ток. О том, что индуцируемое электрическое поле имеет вихревой характер, говорит 2-е уравнение Максвелла.

Возьмём его в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.5.10)$$

Запишем уравнение (4.5.10) в цилиндрических координатах, направив ось OZ вдоль направления магнитного поля.

$$\text{rot}_r \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \quad (a)$$

$$\text{rot}_\theta \vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (b) \quad (4.5.11)$$

$$\text{rot}_z \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \quad (c)$$

По условию задачи $B_r = B_\theta = 0$, поэтому

$$\text{rot}_r \vec{E} = 0, \quad \text{rot}_\theta \vec{E} = 0, \quad (4.5.12)$$

а уравнение (4.5.11)-(c) запишется так:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = - \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (4.5.13)$$

Система уравнений (4.5.12) и (4.5.13) имеет решение

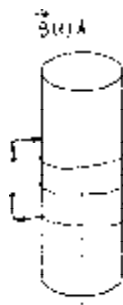


Рис. 3.3

$E_r = E_z = 0$ и $E_\theta = E_\theta(r, t)$, что проверяется подстановкой в уравнение (4.5.12), а уравнение (4.5.13) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) = - \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (4.5.14)$$

которое разрешается так:

$$E_\theta = \frac{1}{r} \left\{ - \int \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \cdot r dr + const(t) \right\}. \quad (4.5.15)$$

В плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля, линии вектора $\vec{E}$ на данном расстоянии r в данный момент времени образуют концентрические окружности с центрами, лежащими на оси магнитного поля. Как и следовало ожидать, из вида 2-го уравнения Максвелла индуцируемое электрическое поле имеет вихревой характер.