

Глава III

§3. Постоянный ток.

В главе II рассматривались заряды, неподвижные в избранной инерциальной системе отсчёта (ИСО). Вокруг зарядов обнаруживалось лишь электростатическое поле. Если же перейти в другую ИСО, в которой заряды (заряженные тела) будут двигаться с постоянной скоростью, то, помимо электрического поля, приборы обнаружат магнитные действия (мы говорим о проявлении магнитного действия единого электромагнитного поля). Движущееся заряженное тело образует так называемый конвекционный ток. Другой вид электрического тока мы получим, создав на концах проводника разность потенциалов. Так как внутри проводника имеются свободные электроны, то они (если цепь замкнута) придут в направленное движение, что мы и называем электрическим током. Если разность потенциалов, приложенная к концам проводника, будет поддерживаться неизменной, то в замкнутой цепи будет циркулировать постоянный ток. Свойства постоянного тока описываются следующими уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3.3.1)$$

которое утверждает, что линии вектора плотности постоянного тока - замкнутые линии;

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}} \right), \quad (3.3.2)$$

где $\mathbf{E}$ - напряжённость поля электрических (кулоновских сил), $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ напряжённость поля сторонних сил, обусловленных явлением электромагнитной индукции, или градиентом температуры, или градиентом концентрации носителей заряда и так далее. Уравнение (3.3.2) называется дифференциальной формой уравнения закона Ома.

Уравнения (3.3.1) и (3.3.2) можно представить и в интегральной форме

$$\int j_n dS = 0 \quad (3.3.1^*)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{ср}}}{R + r}. \quad (3.3.2^*)$$

где $\mathcal{E}^{\text{ср}}$ - суммарная сторонняя ЭДС, R - внешнее сопротивление цепи, r - сопротивление того участка цепи, где возникает ЭДС.

Электрические характеристики постоянного тока определяются также, как и в электростатике (исключение относится к разности потенциалов,

которая в электрической цепи из проводников не должна равняться нулю, когда по цепи идёт ток).

Решим следующие задачи.

Задача №12

Элемент Даниеля состоит из двух концентрических цилиндров медного и цинкового (с радиусами a и b и высотой h). Удельное сопротивление раствора медного купороса равно ρ . Каково внутреннее сопротивление элемента?

Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, познакомимся с другими источниками ЭДС, получившими общее название гальванических элементов.

Представим характеристики гальванических элементов в виде таблицы 1.

Таблица 1.

Название	Электрод		Раствор	ЭДС
	отриц.	полож.		
Элемент Вольта	Цинк	Медь	Раствор серной кислоты	1,0
Элемент Грене	Цинк	Медь	Раствор серной кислоты, деполяризатор – двухромовокислый калий	2,0
Элемент Даниеля	Цинк	Медь	Цинк в растворе серной кислоты, медь в растворе медного купороса; растворы разделены пористым сосудом.	1,1
Элемент Лекланше	Цинк	Уголь	Растворы нашатыря, деполяризатор – перекись марганца	1,46
Элемент Лекланше (сухой)	Цинк	Уголь	Пространство между электродами заполнено пористой массой (гипс, древесные опилки и т. д.), смоченной нашатырем	1,3

Широко используемые ныне батарейки (элементы) по сути дела являются фирменными модификациями элемента Лекланше («Марс», «Варта», «Панасоник» и другие).

По современным представлениям возникновение ЭДС в гальванических элементах обусловлено контактной разностью потенциалов, возникающих

на границе соприкосновения разнородных проводников 1^{го} или 2^{го} родов. Своё название (гальванические элементы) эти источники тока получили от фамилии итальянского врача Луиджи Гальвани (1737-1798), первым исследовавшим электрические явления при мышечном сокращении («животное электричество») и обнаружившим возникновение разности потенциалов при контакте металла с электролитом.

А теперь вернёмся к решению задачи №12.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	r
Дано	a
	b
	h
	ρ

Решение

Естественно выбрать СО, взяв в качестве тела отсчёта один из цилиндров. Итак, СО «Элемент Даниеля». Сделаем чертёж. Детали, обозначенные буквами М и Ц - клеммы.

Так как всё падение напряжения в замкнутой цепи (ЭДС) в данном случае совпадает с разностью потенциалов на электродах.

Нам необходимо независимым способом (не из формулы (3.3.3)) найти силу тока I и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, а тогда искомая величина r будет равна

$$r = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{I}. \quad (3.3.4)$$

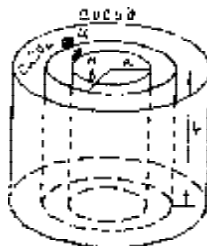


Рис. 18

Исходя из определения плотности тока, находим полный ток

$$I = \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int j dS = \int \sigma E dS = \frac{1}{\rho} \int E dS \quad (3.3.5)$$

Здесь было использовано 8-е уравнение Максвелла (3.3.2) с учётом того, что $\sigma = \frac{1}{\rho}$ и электрическое поле существует в пространстве между медным и цинковым цилиндрами.

Как было показано в задаче №1, внутри металлического тела (сплошного или полого) нет электрического поля; заряды расположены на его поверхности. Следовательно, между цилиндрическими электродами поле обус-

ловлено только теми зарядами, которые расположены на внутреннем, медном цилиндре. Определим напряжённость этого поля, используя теорему Гаусса, а в качестве поверхности интегрирования возьмём коаксиальный цилиндр. Пусть поверхностная плотность зарядов на единицу длины медного цилиндра равна ω .

Тогда $\oint D_n dS = \varepsilon_0 E \cdot 2\pi r \cdot l \cdot q$, откуда учитывая, что $\omega = \frac{q}{l}$ получим

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l} = \frac{\omega}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad (3.3.6)$$

где также учтено, что через основания вспомогательного цилиндра нет потока вектора $\vec{E}$. Сам вектор $\vec{E}$, в силу осевой симметрии задачи, направлен перпендикулярно боковой поверхности цилиндра, по радиус-вектору $\vec{r}$.

Продолжим расчёт полного тока по формуле (3.3.5):

$$I = \frac{1}{\rho} \int E dS = \frac{1}{\rho} \int \frac{\omega}{2\pi\varepsilon_0 r} 2\pi r dh = \frac{1}{\rho} \frac{\omega}{\varepsilon_0} \int_0^h dh = \frac{\omega h}{\rho\varepsilon_0}. \quad (3.3.7)$$

Разность потенциалов для формулы (3.3.4) найдём, используя определение скалярного потенциала (2.2):

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.3.8)$$

где учтено направление вектора $\vec{E}$ только вдоль радиус-вектора $\vec{r}$, единичный орт равен $\frac{\vec{r}}{r}$.

Из (3.3.8) определим разность потенциалов

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_a^b \frac{\omega}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (3.3.9)$$

Объединяя формулы (3.3.4), (3.3.7) и (3.3.9), получим:

$$r = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{\omega}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{\rho\varepsilon_0}{\omega h} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{b}{a}. \quad (3.3.10)$$

Ведённая в процессе решения вспомогательная величина ω , в конечном выражении (3.3.10) не вошла.

Интересно, что точно такой же ответ будет получен в практически важном варианте условия задачи. Приведём эту задачу: определить сопротивление изоляции кабеля длины l , состоящего из цилиндрического проводника

радиуса a и цилиндрической изоляции с наружным радиусом b . Изоляция соприкасается с окружающей средой, которая считается хорошим провод-

ником. Аналогичное решение приведёт к формуле $R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}$.

Задача №13

В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_i . С каждого электрода стекает ток I_i . Определить полное количество «джоулева тепла», выделяющегося в среде в 1 секунду.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	Q
Дано	φ_i I_i

Решение

Выберем СО «Сосуд с электролитом». Благодаря такому выбору СО, мы упрощаем решение, так как «устраняем» из расчёта конвекционные токи. В далёком прошлом такой сосуд с опущенными в него электродами и заполненный электролитом, называли «вольтаметр» (не путать с «вольтметром»). В введении к данному разделу отмечалось, что ток возникает, если в проводящей цепи поддерживается разность потенциалов.

Очевидно, что φ_i - разные. Однако такие слова условия задачи «с каждого электрода стекает ток I_i » не следует понимать буквально: с одних электродов ток будет стекать, но в другие электроды он должен входить. Нам нужно определить количество «джоулева тепла». И эти слова следует воспринимать с поправкой. Дело в том, что до середины XIX века в физическом словаре существовало такое понятие как «тепловая энергия», аккумулятором и переносчиком которой была гипотетическая жидкость - теплород. Опыты Р. Майера и Джоуля отвергли существование теплорода и дали возможность Гельмгольцу сформулировать великий закон природы - закон сохранения и превращения энергии. Энергия физического тела, пропорциональная его температуре, получила название «внутренняя энергия». Это суммарная кинетическая энергия движения частиц тела и потенциальная энергия их взаимодействия между собой. Она может быть изменена путём различного физического воздействия на тело. В том числе внутреннюю энергию проводников можно изменить, пропуская по ним электрический ток, чья энергия и перейдёт во внутреннюю энергию проводников. Этот процесс сопровождается нагреванием проводников (как в нашей задаче), или разог-

ревом до такой температуры, что проводники (или их отдельные части) начинают светиться (как, например, в электрических лампочках накаливания). В определённых условиях выделяющаяся при прохождении электрического тока энергия расплавляет проводник, именно этот процесс используется в электросварке.

Итак, хотя в нашем словаре бытуют анахронизмы вроде «теплоёмкости», «джоулева тепла» и так далее, но нужно ясно понимать, что «тепловой энергии» не существует.

Поэтому бессмысленно «изготавливать счётчики такой энергии» (эти слова заимствованы из радиорекламы). На самом деле упоминаемые счётчики измеряют расход горячей воды. А что откладывается на шкале этих счётчиков - хоть рубли, хоть метры кубические и так далее - это право изготовителя.

Для аналитического решения задачи воспользуемся формулой (1.9), в которой третье слагаемое слева как раз и определяет «джоулево тепло», выделяющееся в проводнике за единицу времени в единице объёма:

$$Q_1 = \frac{j^2}{\sigma} . \quad (3.3.11)$$

Преобразуем, это выражение так: $Q_1 = \frac{j^2}{\sigma} = j \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = j \mathbf{E}$, где использована формула закона Ома для участка цепи в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} . \quad (3.3.12)$$

Чтобы получить выражение для «джоулева тепла», выделяющегося во всей проводящей среде, необходимо проинтегрировать формулу (3.3.12) по объёму токопроводящей среды

$$Q = \int j \mathbf{E} dV . \quad (3.3.13)$$

Воспользуемся формулой из векторного анализа.

$$\operatorname{div}(\mathbf{j} \varphi) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{j} + j \operatorname{grad} \varphi , \quad (3.3.14)$$

а также

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi . \quad (2.2)$$

Выражение (3.3.14) перепишем так:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j} \varphi) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{j} - j \mathbf{E}$$

или

$$j \mathbf{E} = -\operatorname{div}(\mathbf{j} \varphi) \quad (3.3.15)$$

где было учтено, что в цепи постоянного тока 7-е уравнение Максвелла (1.7)

упрощается:

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{j} = 0. \quad (3.3.1)$$

Формула (3.3.13) принимает вид:

$$Q = - \int \operatorname{div}(\varphi \mathbf{j}) dV. \quad (3.3.16)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и сведём объёмный интеграл (3.3.16) к поверхностному (при этом учтём, что у нас в проводящую среду опущено n электродов, а также то, что на стенках сосуда $j_n \equiv 0$):

$$Q = \sum_{i=1}^n \varphi_i \oint_{S_i} j_{ni} dS = \sum_{i=1}^n \varphi_i I_i \quad (3.3.17)$$

В (3.3.17) «исчез» знак «минус». Во-первых, величина Q будет заведомо положительной величиной (в среде выделяется «джоулево тепло»). Во-вторых, выше мы уже отмечали, что ток будет стекать не со всех электродов. Учитывая это, приписываем направлению тока знаки «плюс» и «минус», получим, что суммарный «положительный» ток должен дать преобладающий вклад, чтобы Q оказалось заведомо положительной величиной.