

Глава II

§2. Электростатика.

Со времени утверждения специальной теории относительности материя проявляется в двух видах: в виде вещества и в виде единого электромагнитного поля.

Исторически сложилось так, что разные проявления единого электромагнитного поля изучались независимо друг от друга, как электростатические или магнитные явления. Только опыты Эрстеда (1820г) и Фарадея (1831 г) показали, что эти явления тесно связаны между собой и их самостоятельность условна.

В зависимости от выбора СО единое электромагнитное поле проявляет свое электрическое или магнитное действие. Назовём электростатикой такой раздел электродинамики, в котором используется СО, в которых заряды и окружающие их поля неподвижны. Обращаем внимание на то, что заряды и их электростатические поля физически неотделимы. Поэтому нельзя говорить, что заряд создаёт поле. Заряд окружен его полем. Не существует в электродинамике Фарадея-Максвелла «голых» электрических зарядов, заряд и его поле - это не причина и следствие, а две составляющие субстанции, связанные между собой.

В силу определения электростатики необходимо из уравнений (1) - (18) главы I устранить члены, определяющие свойства электрического тока и его магнитного поля (которые также физически неотделимы друг от друга, не образуют причину и следствие, а сосуществуют), а также опустить производные по времени от электродинамических характеристик.

Итак, для описания всех электростатических процессов необходимы следующие выражения:

$$a) \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \text{ и } \oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (2.1)$$

откуда следует, что электростатическое поле, поле вектора $\vec{E}$, безвихревое поле, работа в нём по замкнутому пути равна нулю. А это означает, что электростатическое поле является потенциальным полем и для его описания можно ввести вспомогательную и неоднозначную функцию - скалярный потенциал: по определению

$$b) \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.2)$$

Физический смысл имеет разность потенциалов, так как при этом устраняется неоднозначность введённого выше скалярного потенциала. Но эта же неоднозначность позволяет приписать любой точке поля нулевое значение

ние потенциала. Поэтому, когда говорят о потенциале, на самом деле имеют ввиду разность потенциалов. Обычно в теоретической физике за точку нулевого потенциала принимают бесконечно удаленную точку, а в электротехнике - любую точку Земли.

Четвёртое уравнение Максвелла сохраняет и свой вид, и своё физическое содержание

$$\text{в) } \operatorname{div} \vec{D} = \rho ; \oint D_n = dS = q. \quad (2.3)$$

То же можно сказать и о пятом уравнении Максвелла,

$$\text{г) } \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.4)$$

а также о граничных условиях на поверхности раздела двух сред.

$$\text{д) } D_{2n} - D_{1n} = \omega, \quad (2.5)$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}. \quad (2.6)$$

Кроме того, при переходе через границу раздела двух сред скалярный потенциал непрерывен

$$\text{е) } \varphi_1 = \varphi_2 \quad (2.7)$$

в противном случае можно было бы создать вечный двигатель 1-го рода.

Для решения электростатических задач используются разные методы, учитывающие свойства электростатического поля. Рассмотрим эти методы при решении типичных электростатических задач.

§2.1. Принцип суперпозиции полей.

Задача №1

Определить характеристики электростатического поля внутри и вне проводящего шара, по поверхности которого распределён заряд q .

Следуя методике решения физических задач, выберем инерциальную систему отсчета. Очевидно, чтобы получить электростатическое поле, необходимо СО связать с заряженным шаром. Назовём эту СО «Заряженный шар». По условию задачи известно, что шар проводящий (металлический), поэтому заряды распределены по поверхности шара. Так как в проводнике поля нет, то тотчас же получаем, что потенциал внутри шара будет иметь постоянное значение (в этом случае $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \equiv 0$).

Вне шара при удалении от него поле должно убывать. Особенностью

данной задачи является то, что заряд q распределён по поверхности шара. Если этот заряд разбить на бесконечно малые порции, то тогда можно воспользоваться принципом суперпозиции. Несмотря на очевидность действий, вся трудность будет состоять в том, как осуществить разбиение заряда на бесконечно малые порции.

Запишем условие задачи кратко.

Решение

Найти	φ, E
Дано	q r_0 ε_0

Выбрав СО «Заряженный шар», сделаем в ней чертёж, соответствующий условию задачи. В силу сферической симметрии заряженного тела точку наблюдения P можно выбрать в любом направлении. Эта же симметричность чертежа позволяет разбить поверхность шара на бесконечно узкие кольцевые полоски, центры которых лежат на линии OP . Заряды, расположенные на этих полосках, можно считать бесконечно малыми (точечными), их потенциалы определять по формуле потенциала точечного заряда.

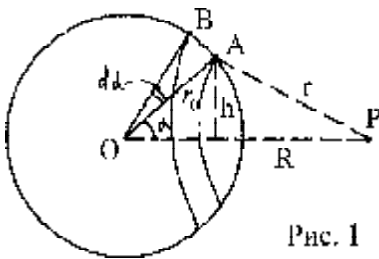


Рис. 1 ..

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (2.1.1)$$

и, применяя принцип суперпозиции, найдём полный потенциал в точке наблюдения от всех зарядов, размещенных на поверхности шара.

Итак,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (2.1.2)$$

где предполагается, что внутри и вне шара - вакуум.

Достроим чертёж согласно проведённому анализу (рис.1). Тогда

$$dq = \omega dS, \text{ где } \omega = \frac{q}{4\pi r_0^2},$$

$$dS = 2\pi h \cdot AB = 2\pi r_0 \sin \alpha \cdot r_0 d\alpha = 2\pi r_0^2 \sin \alpha d\alpha,$$

$$\text{и } r = \left(\sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \alpha} \right) \text{ по теореме элементарной геометрии.}$$

Интегрирование в формуле (2.1.2) будет производиться по углу α . Однако пределы его изменения будут не от 0 до 2π , а от 0 до π , так как вторая половина сферы учтена при выборе кольцевой площадки.

После подстановки величин в формулу (2.1.2), она принимает вид табличного интеграла

$$\varphi = \frac{\omega r_0^2}{2\varepsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R \cos \alpha}} = \frac{r_0 \omega}{2\varepsilon_0 R} \left(r_0 + R - \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2r_0 R} \right). \quad (2.1.3)$$

До сих пор мы не учитывали, где находится точка наблюдения P. Для точек внутри шара $R < r_0$, а для точек вне шара $R > r_0$. Поэтому рассмотрим два варианта решения (2.1.3):

для поля внутри шара:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{\omega r_0}{2\varepsilon_0 R} [r_0 + R - (r_0 - R)] = \frac{\omega r_0}{2\varepsilon_0 R} [r_0 + R - r_0 + R] = \\ &= \frac{\omega r_0}{2\varepsilon_0} \cdot 2 = \frac{q}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{r_0}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r_0} = const, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

как и должно быть;

для поля вне шара:

$$\varphi_e = \frac{\omega r_0}{2\varepsilon_0 R} [r_0 + R - (R - r_0)] = \frac{\omega r_0^2}{2\varepsilon_0 R} \cdot 2 = \frac{q r_0^2}{4\pi r_0^2 \varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R} \quad (2.1.5)$$

Формула (2.1.5) утверждает, что вне шара его поле совпадает с полем точечного заряда той же величины, помещенного в центр шара. Проверим, что на поверхности шара потенциал непрерывен (см. формулу (2.7)):

$$\varphi_l|_{R=r_0} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r_0}; \quad \varphi_e|_{R=r_0} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r_0}, \quad \text{что и должно быть.}$$

Найдём силовую характеристику поля в данной задаче, исходя из формулы (2.2):

$$\vec{E} = -grad\varphi.$$

В нашем случае задача обладает сферической симметрией, поэтому вектор $\vec{E}$ направлен по радиусу r_0 :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r_0} \quad (2.1.6)$$

Составим $\frac{\partial \varphi}{\partial R}$ для случаев $r_0 > R$ и $r_0 < R$:

Так как внутри шара $\varphi_i = const$, то $\frac{\partial \varphi_i}{\partial R} \equiv 0$, т.е. напряженность поля внутри шара равна нулю.

Вне шара

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ и } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r_0} \quad (2.1.7)$$

Построим графики зависимости $\varphi(R)$ и $E(R)$:

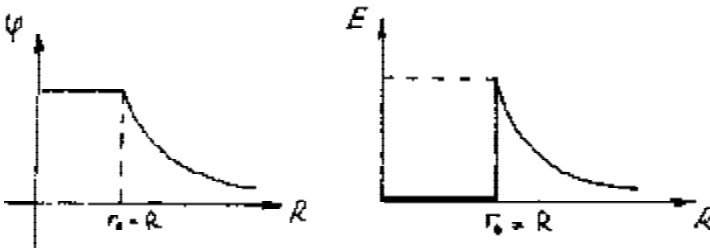


Рис. 3

На рис.3 виден скачок величины вектора $\vec{E}$.

У заряженного шара поле обладает центральной симметрией, поэтому вектор $\vec{E}$ направлен по нормали к поверхности. Убедимся в справедливости формулы (2.5) $D_{2n} - D_{1n} = \omega$. В нашей задаче $D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} = 0$, тогда

$$D_{2n} = \epsilon_0 E_{2n} \Big|_{R=r_0} = \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Big|_{R=r_0} = \frac{q}{4\pi R^2} \Big|_{R=r_0} = \frac{q}{4\pi R^2} = \omega, \text{ как и долж-}$$

но быть.

§2.2. Применение теоремы Остроградского-Гаусса для решения электростатических задач.

Задача №2

Определить, под действием какой силы совершает движение электрон в атоме, модель которого предложена Дж. Томсоном в

1902 году. Установить характер движения электрона и объяснить, почему эта модель была физически несостоятельной.

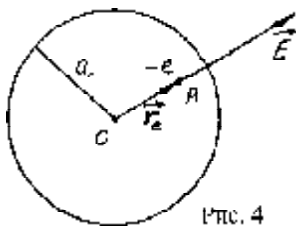
Запишем условие задачи кратко.

Найти	$F(r), r(t)$
Дано	e m a

Решение

С открытием электрона в 1897 году Дж. Томсоном, возникла проблема: как устроен атом, например водорода. Поскольку был открыт лишь отрицательно заряженный электрон - первая элементарная частица, а атом в целом был нейтральным, то было сде-

лано предположение, что равный по величине заряду электрона положительный заряд «размазан» по всему объёму атома. Первоначально Дж. Томсон считал, что электрон (или электроны в более сложных атомах, чем атом водорода) неподвижен внутри положительно заряженного объёма. Но существовала теорема Ирншоу, согласно которой такая модель была неустойчивой. Поэтому вскоре Дж. Томсон усложнил свою модель, «заставив» электрон двигаться внутри положительно заряженного объёма атома. Именно о такой модели атома идёт речь в данной задаче.



Выберем систему отсчета «Атом», связав начало системы координат с центром положительно заряженного облака, которое будем рассматривать в виде сферы.

Сделаем чертёж в этой СО. Задача обладает сферической симметрией, поэтому выберем произвольное положение электрона внутри положительно заряженной сферы, его положение определяется радиус-вектором $\vec{r}$, проведённым из центра

сферы как начала координат в мгновенное положение электрона в точку A . Так как вектор напряжённости электростатического поля положительно заряженной сферы как внутри, так и вне сферы направлен по радиус-вектору, то в точке A (где находится электрон) вектор $\vec{E}$ направлен вдоль радиуса от центра сферы.

Нам необходимо определить $\vec{E}$ в точке A , тогда можно будет составить уравнение движения и определить характер движения электрона.

В случае применения теоремы Гаусса принципиально важным является выбор поверхности интегрирования. В данной задаче, обладающей сферической симметрией, само собой напрашивается взять в качестве такой

поверхности поверхность вспомогательной сферы с центром в точке О и содержащей на себе точку А, где находится электрон.

$$\oint D_n dS = q, \quad (2.2.1)$$

где $\mathbf{n}$ - нормаль к поверхности интегрирования в точке А, эта нормаль по направлению совпадает с радиус-вектором $\mathbf{r}$, поэтому можно записать $D_n \equiv D_r$; q - заряд, заключённый внутри вспомогательной сферы, ниже мы подсчитаем его величину (заряд q составляет часть общего заряда положительно заряженного облака e).

Так как заряд e равномерно распределён по объёму облака, то можно считать, что поле (в том числе и вектор $\mathbf{D}$) на равном расстоянии от центра (точка О) имеют одно и то же значение. Поэтому величину D_r можно вынести за знак интеграла как величину, постоянную во всех точках поверхности вспомогательной сферы. Воспользуемся пятым уравнением Максвелла

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \varepsilon = 1 \quad (2.2.2)$$

и, определив объёмную плотность положительного заряда

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}, \quad (2.2.3)$$

а затем и заряд внутри вспомогательной сферы

$$q = \rho V = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \quad (2.2.4)$$

распишем формулу (2.2.1) так:

$$\varepsilon_0 E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{e}{\alpha^3} r^3, \quad (2.2.5)$$

$$\text{откуда} \quad E_r = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\alpha^3} r, \quad (2.2.6)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{E}_r = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\alpha^3} \mathbf{r}. \quad (2.2.7)$$

Кулоновская сила, действующая на электрон в точке А, равна

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha^3} \vec{r}, \quad (2.2.8)$$

где появление знака «минус» связано со знаком заряда электрона. Формула (2.2.8) раскрывает один из вопросов, поставленных в задаче: сила $\vec{F}$ пропорциональна смещению $\vec{r}$ электрона от центра сферы (где $\vec{r} \equiv 0$) и направлена в сторону, противоположную вектору $\vec{r}$. Такую силу в механике называют упругой силой, под действием которой частица должна совершать гармоническое движение. Составим уравнение движения: $\vec{F} = m\vec{a}$ или $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$.

Так как $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha^3} \vec{r}$, то окончательно уравнение движения пишется так:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0, \quad (2.2.9)$$

где $\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha^3 m}$ - частота гармонических колебаний по закону:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.2.10)$$

Из формулы (2.2.10) следует, что электрон будет совершать одномерное колебательное движение вдоль диаметра.

Следует отметить, что рассмотренная модель атома является физически несостоятельной, так как, двигаясь с ускорением $\ddot{\vec{r}}$, электрон должен непрерывно излучать электромагнитные волны. И, в конце концов, остановиться в центре положительно заряженного облака. Но, как отмечалось выше, существует классическая теорема Ирншоу, согласно которой не может существовать устойчивая статическая система электрических зарядов, между которыми действуют лишь кулоновские силы.

Как известно, физика объяснила устойчивость атома (правда, изменив модель атома, вместо модели Томсона была утверждена экспериментально подтверждённая модель Резерфорда - «планетарная» модель), но это было сделано путём введения «безумных» постулатов Н. Бора, а затем в квантовой механике на принципиально другой основе - на основе корпускулярно-волнового дуализма электрона.

Задача №3

Вычислить напряжённость электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\vec{E}$
Дано	ω

Решение

Так как в задаче рассматриваются неподвижные заряды (мы решаем задачи из раздела «Электростатика»), то целесообразно выбрать СО, связав её с плоскостью. Итак, СО «Плоскость».

В этой СО сделаем чертёж (рис.5).

Выбирая точку наблюдения А (в этой точке будем определять вектор $\vec{E}$), обнаруживаем, что все точки, расположенные в плоскости, параллельной исходной, эквивалентны точке А: в силу бесконечности заряженной плоскости, во всех точках

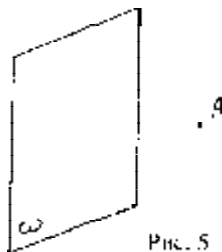


Рис. 5

вспомогательной плоскости напряжённость поля будет одной и той же. Кроме того, из этого непосредственно следует, что вектор $\vec{E}$ должен быть перпендикулярен заряженной плоскости. В противном случае в точках вспомогательной плоскости вектор $\vec{E}$, не будучи направлен перпендикулярно заряженной плоскости, имел бы составляющую вдоль плоскости (рис.6). Совмещая вспомогательную плоскость с заряженной, мы бы получили условие возникновения тока вдоль заряженной поверхности: на заряды действовала бы сила $\vec{E}_{\uparrow\uparrow}$. Мы же рассматриваем электростатическую задачу. Итак, вектор $\vec{E}$ перпендикулярен заряженной плоскости.

Как известно, метод решения электростатических задач с использованием теоремы Гаусса требует удачного выбора вспомогательной поверхности интегрирования, содержащей точку наблюдения А. При этом целесообразно использовать симметрию расположения зарядов. В данной задаче выберем поверхность интегрирования в виде прямого цилиндра, образующие которого перпендикулярны заряженной поверхности, а точка А располагается на основании цилиндра.

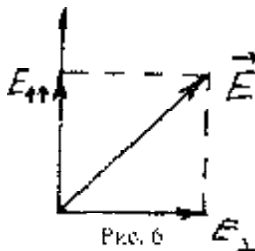


Рис. 6

Так как поле заряженной поверхности простирается по обе стороны от неё, то построим вспомогательный цилиндр по обе стороны от заряженной плоскости (рис.7).

Такой выбор поверхности интегрирования упрощает взятие интеграла $\oint D_n dS = q$, (2.3)

так как потока вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность цилиндра не бу-

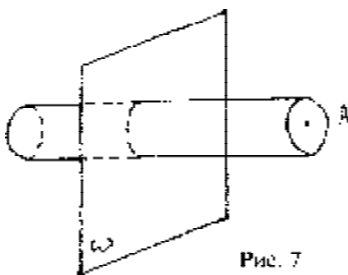


Рис. 7

дет, и нужно учесть только потоки через основания цилиндра. Так как площадки оснований одинаковы, то выражение (2.3) принимает вид:

$$2\Delta S \cdot \varepsilon_0 E_n = \Delta S \cdot \omega, \quad (2.2.10)$$

где справа стоит величина заряда, расположенного на площадке, вырезанной цилиндром из заряженной поверхности.

Так как величина ΔS отлична от нуля, на ΔS можно разделить обе сторо-

ны равенства (2.2.10), учитывая, что у вектора $\vec{E}$ нет иной составляющей, кроме как направленной нормально к бесконечной заряженной поверхности, опустим индекс "n". При составлении равенства (2.2.10) было использовано пятое уравнение Максвелла (1.5) или (2.4).

Итак,

$$E = \frac{\omega}{2\varepsilon_0}. \quad (2.2.11)$$

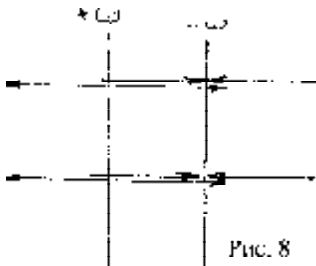
Как и ожидалось, поле бесконечной заряженной плоскости однородно и не изменяется при удалении от заряженной плоскости. У реальных конечных по размерам заряженных поверхностей скажется краевой эффект: поле на концах конечной заряженной поверхности не будет однородным и направленным перпендикулярно к поверхности.

Усложним задачу и рассмотрим поле, окружающее две бесконечные поверхности, заряженные разными по знаку зарядами, но одной плотности.

Изобразим поле этих плоскостей при помощи силовых линий, учитывая при этом как договорённость о направлении этих линий относительно разноимённо заряженных поверхностей, так и их густоту (в силу равенства $|+\omega| = |-\omega|$ густота линий будет одинакова).

Как видно из рисунка 8, вне заряженных поверхностей поле разноимённо заряженных поверхностей скомпенсировано, а между по-

верхностями величина результирующего поля вдвое больше поля одной бесконечной заряженной поверхности. Формально мы получили идеальный конденсатор (плоскости бесконечно большие, причём расстояние между пластинами не играет роли). В реальном плоском конденсаторе пренебречь краевыми эффектами нельзя. Поле в таком реальном конденсаторе тем точнее совпадает с полем идеального конденсатора, чем меньше расстояние между пластинами по сравнению с их размерами.



Итак, в плоском конденсаторе (при выполнении выше указанного условия) можно считать, что результирующее поле E равно:

$$E = 2 \cdot \frac{\omega}{2\varepsilon_0} = \frac{\omega}{\varepsilon_0}. \quad (2.2.12)$$

§2.3. Применение уравнений Пуассона и Лапласа в электростатике.

Сделаем некоторые исторические замечания. В теории электрических и магнитных явлений, которые, к тому же, считались независимыми друг от друга и до работ Фарадея и Максвелла рассматривались на основе представления о дальнем действии, понятие потенциала имело чисто математическое содержание и не связывалось с физическим понятием «поле», так как понятия «поля» в физике не было.

Понятие о потенциале возникло в классической механике. В 1777 году Ж. Лагранж показал, что силу тяготения, которую испытывает единичная точечная масса, можно получить, дифференцируя по координатам функцию

цию $\varphi = \sum \frac{m_i}{R_i}$. В 1782 году П. Лаплас перешел к непрерывному распре-

делению масс и показал, что функция $\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$ вне масс удовлетворяет урав-

НИЮ $\nabla^2 \varphi = 0$ (символ ∇^2 был введен позднее В. Гамильтоном). В 1812 году С. Пуассон показал, что в точках, в которых $\rho \neq 0$, функция φ удовлет-

входит в уравнение $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$.

Учение о потенциале было разработано Г. Гринем. В работе Гаусса «Общая теория земного магнетизма» впервые устанавливается связь между работой потенциальной силы и изменением потенциала, тем самым устанавливается физический смысл разности потенциалов.

А теперь приложим рассматриваемый метод для решения ряда задач.

Задача №4

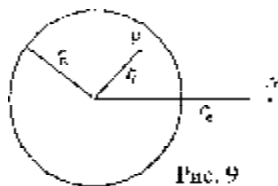
Вычислить потенциал электростатического поля, окружающего шар радиуса R , по объёму которого равномерно распределён заряд q .

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\varphi_i; \varphi_e$
Дано	q
	R
	ϵ_0
	ϵ

Решение

Выберем **СО** «Заряженный шар», связав начало системы координат с центром шара. Сделаем чертёж в выбранной СО. Задача обладает сферической симметрией в силу изотропности про-



странства как внутри сферы, так и вне её (считаем, что вещество сферы обладает диэлектрической проницаемостью ϵ , а вне сферы (для упрощения задачи) – вакуум ϵ_0).

В силу указанной симметрии запишем уравнение Пуассона в сферической системе координат:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (2.3.1)$$

причём $\rho = \text{const}$ при $r_i \leq R$, $\rho = 0$ при $r_e > R$.

Поскольку пространство изотропно, то решение не должно зависеть от углов θ и α и уравнение (2.3.1) существенно упрощается:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(r_i^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial r_i} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (r_i \leq R), \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_e} \left(r_e^2 \frac{\partial \varphi_e}{\partial r_e} \right) = 0 \quad (r_e > R). \quad (2.3.3)$$

Интегрируя уравнения (2.3.2) и (2.3.3), получаем:

$$\varphi_i = \frac{\rho}{6\varepsilon_0 \varepsilon} r_i^2 - \frac{A}{r_i} + B, \quad (2.3.4)$$

$$\varphi_e = -\frac{C}{r_e} + D. \quad (2.3.5)$$

Займёмся нахождением постоянных интегрирования A , B , C , и D . Чтобы потенциал в центре шара φ_i имел конечное значение, необходимо в (2.3.4) положить $A = 0$, и соответствующий член устраняется из решения (2.3.4).

В §2 было показано, что скалярный потенциал φ является вспомогательной функцией в силу неоднозначности введения его посредством равенства:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}(\varphi + \varphi_0). \quad (2.2)$$

Постоянную величину φ_0 , в частности, можно приравнять нулю. В теоретической физике считается, что $\varphi = 0$ в бесконечности (в электротехнике $\varphi = 0$ в заземлении или даже на шасси радиоприёмника).

Поэтому, чтобы потенциал в бесконечности $r_e \rightarrow \infty$ принимал нулевое значение (см. формулу (2.3.5)), необходимо положить коэффициент D равным нулю: $D = 0$.

В результате учёта предельных условий решения принимают вид:

$$\varphi_i = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0 \varepsilon} r_i^2 + B, \quad (2.3.6)$$

$$\varphi_e = -\frac{C}{r_e}. \quad (2.3.7)$$

Для нахождения оставшихся двух постоянных интегрирования B и C , воспользуемся непрерывностью скалярного потенциала при переходе через поверхность шара

$$\varphi_i \Big|_{r_i=R} = \varphi_e \Big|_{r_e=R} , \quad (2.7)$$

$$\text{или} \quad -\frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon} R^2 + B = -\frac{C}{R} . \quad (2.3.8)$$

Мы получили одно равенство, связывающее две постоянные В и С. Составим ещё одно соотношение для этих величин, используя непрерывность нормальных компонент вектора электрической индукции при переходе через поверхность раздела двух сред, если при этом на этой поверхности нет поверхностных зарядов:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0, \quad (2.4)$$

которое в нашем случае запишется так (с учётом формул (2.4) и (2.2) и того, что $\vec{r}$ и $\vec{n}$ - однонаправлены):

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_i \Big|_{r_i=R} = \varepsilon_0 E_e \Big|_{r_e=R} , \quad \text{или} \\ -\varepsilon\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_i} \right) \Big|_{r_i=R} = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial r_e} \right) \Big|_{r_e=R} . \quad (2.3.9)$$

Составляем равенство (2.3.9):

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon} \cdot 2r_i \Big|_{r_i=R} = -\varepsilon_0 \frac{C}{r_e^2} \Big|_{r_e=R} \\ \text{или} \quad \frac{\rho}{3} R = -\varepsilon_0 \frac{C}{R^2} , \quad (2.3.10)$$

$$\text{откуда} \quad C = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^3 . \quad (2.3.11)$$

А используя соотношение (2.3.8), определяем постоянную В :

$$B = -\frac{C}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon} R^2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R^2 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon} R^2 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon} (1 + 2\varepsilon) R^2 \quad (2.3.12)$$

Искомые потенциалы запишутся так:

$$\varphi_i = -\frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0} r_i^2 + \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0} (1 + 2\varepsilon) R^2 = \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0} \left[(1 + 2\varepsilon) R^2 - r_i^2 \right] \quad (2.3.13)$$

$$\varphi_e = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r_e} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e} \quad (2.3.14)$$

Выразим результат решения графически $\varphi(r)$:

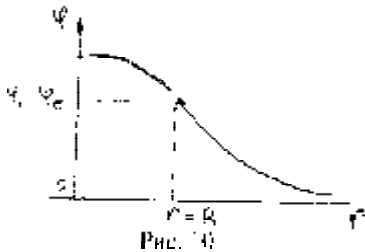


Рис. 10

Из формулы (2.3.14) следует, что вне шара потенциал его поля совпадает с потенциалом точечного заряда, равного заряду шара, но помещённого в центр шара.

Воспользуемся формулой (2.2) и определим напряжённость поля заряженного шара:

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Тогда внутри шара: $E_i = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon} r_i$ (2.3.15)

Вне шара: $E_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2}$ (2.3.16)

В обоих случаях вектор $\vec{E}$ направлен по радиусу. Представим формулы (2.3.15) и (2.3.16) графически.

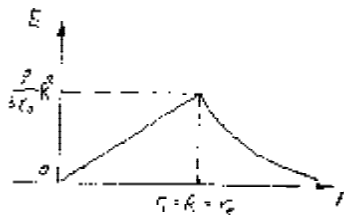


Рис. 11

Задача №5

Очередная задача рассматривает равновесное состояние плазмы - четвертого состояния вещества.

Плазма - это ионизированный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов равны. В состоянии плазмы находится подавляющая часть вещества Вселенной.

Обладая электрическими зарядами, частицы плазмы взаимодействуют между собой кулоновскими силами. При этом в плазме возни-

кает ряд интересных физических явлений, с одним из которых мы познакомимся, решая следующую задачу.

Найти равновесное распределение зарядов в плазме.

Запишем условие задачи кратко.

Решение

Найти	$\bar{\varphi}$
Дано	$+e$
	$-e$
	n_1
	n_2

Свяжем СО с каким-либо положительным зарядом. Поскольку мы не рассматриваем движение частиц плазмы и её как целое, назовём СО «Плазма».

Будем считать плазму изотропной, поэтому электростатический потенциал в некоторой точке будет функцией только r - расстояния от начала координат (положительно заряженной частицы) до точки наблюдения.

Кулоновское взаимодействие между частицами плазмы приводит к появлению в объёме плазмы некоторого среднего электрического поля, характеризуемого потенциалом $\bar{\varphi}$. Покажем, что $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Пуассона, решим его в данной задаче.

Выберем в объёме плазмы элементарный объём dV , находящийся на расстоянии r от начала координат. Так как каждый ион плазмы находится во внешнем поле остальных заряженных частиц, то можно (и нужно) воспользоваться распределением Больцмана - распределением для положительно заряженных ионов

$$n_1 dV = \bar{n}_1 \exp\left(-\frac{e\bar{\varphi}}{kT}\right) dV \quad (2.3.17)$$

и для отрицательно заряженных ионов и электронов

$$n_2 dV = \bar{n}_2 \exp\left(\frac{e\bar{\varphi}}{kT}\right) dV, \quad (2.3.18)$$

где n_1 и n_2 - средние числа соответствующих ионов в единице объёма (при $T \rightarrow \infty$).

Определим избыточный заряд частиц, окружающих выделенный положительно заряженный ион, с которым (совершенно произвольно) было связано начало координат.

$$de = \left[\bar{n}_1 e \cdot \exp\left(-\frac{e\bar{\varphi}}{kT}\right) - \bar{n}_2 e \cdot \exp\left(\frac{e\bar{\varphi}}{kT}\right) \right] dV. \quad (2.3.19)$$

Этот заряд обусловлен тем, что вероятность нахождения в элементе объема dV ионов разного знака неодинакова. Однако в равновесной плазме никакого ионного облака вокруг каждого из ионов не существует. Это следует хотя бы из того, что выделение иона в начале координат было сделано совершенно произвольно, и никаких выделенных ионов в равновесной плазме не существует. Имеется лишь некоторая вероятностная корреляция между расположением любой пары ионов в силу их электростатического взаимодействия. Здесь уместно провести сравнение с расположением разноименных ионов в ионной кристаллической решетке NaCl: вокруг каждого иона Na^+ на ближайшем расстоянии - на расстоянии постоянной решетки находятся шесть ионов Cl^- , но вместе с тем, каждый из этих ионов Cl^- окружен шестью ионами Na^+ .

Средняя плотность заряда в точке, находящейся на расстоянии r от начала координат будет:

$$\bar{\rho}(r) = e \left[\bar{n}_1 \exp\left(-\frac{e\bar{\varphi}}{kT}\right) - \bar{n}_2 \exp\left(\frac{e\bar{\varphi}}{kT}\right) \right]. \quad (2.3.20)$$

Считая, что $e\bar{\varphi} \ll kT$ (что является условием идеальности плазмы), разложим экспоненты в ряд Тейлора и ограничимся первыми двумя членами разложения. Тогда

$$\bar{\rho} \approx -\frac{e^2(\bar{n}_1 + \bar{n}_2)}{kT} \bar{\varphi}, \quad (2.3.21)$$

где учтена нейтральность плазмы $(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) = 0$

Составим уравнение Пуассона для $\bar{\varphi}$:

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0}, \quad (2.3.22)$$

или

$$\Delta \bar{\varphi} = \frac{e^2(\bar{n}_1 + \bar{n}_2)}{\varepsilon_0 kT} \bar{\varphi} = \chi^2 \bar{\varphi}, \quad (2.3.23)$$

$$\text{где} \quad \chi^2 = \frac{e^2(\bar{n}_1 + \bar{n}_2)}{\varepsilon_0 kT} = \frac{e^2 \bar{N}}{\varepsilon_0 kT}. \quad (2.3.24)$$

Уравнение (2.3.23) обычно в теории плазмы называют уравнением Пуассона-Больцмана, оно является основным уравнением равновесной иде-

альной плазмы.

Учитывая сферическую симметрию задачи, запишем уравнение (2.3.23) так:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \bar{\varphi} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{\varphi}) = \chi^2 \bar{\varphi} , \quad (2.3.25)$$

что можно проверить, преобразуя левую сторону радиального уравнения Пуассона.

Введём новую переменную:

$$f = r \bar{\varphi} . \quad (2.3.26)$$

Тогда уравнение (2.3.25) запишется так:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \chi^2 f , \quad (2.3.27)$$

Его решением является функция вида

$$f = A e^{-\chi r} + B e^{\chi r} , \quad (2.3.28)$$

что легко проверить прямой подстановкой.

В силу конечности $\bar{\varphi}$ при $r \rightarrow \infty$ необходимо положить коэффициент **B** равным нулю.

Итак,

$$\bar{\varphi} = \frac{A}{r} e^{-\chi r} . \quad (2.3.29)$$

Определим постоянную **A**, учитывая, что вблизи и начала координат формула (2.3.29) должна совпадать с кулоновским полем заряда, расположенного в начале координат, то есть

$$\varphi_{r \rightarrow 0} = \frac{A}{r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} , \text{ откуда } A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} . \quad (2.3.30)$$

Окончательно решение уравнения (2.3.23) запишется так:

$$\bar{\varphi} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\chi r} . \quad (2.3.31)$$

Величина χ^{-1} , определяющая убывание потенциала $\bar{\varphi}$ в **e** раз, называется дебаевским радиусом.

Потенциал (2.3.31) складывается из потенциала выделенного иона в точке **O** и из потенциала, обусловленного полем остальных ионов плазмы $\bar{\varphi}'$:

$$\bar{\varphi} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi' . \quad (2.3.32)$$

Из последних двух формул следует, что

$$\varphi' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\chi r} - 1 \right) . \quad (2.3.33)$$

Решим обратную задачу: по известному потенциалу (2.3.33), определим плотность зарядов, обуславливающих этот потенциал:

$$\bar{\rho}' = -\epsilon_0 \Delta \bar{\varphi}' = -\epsilon_0 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \Delta \frac{\exp(-\chi r) - 1}{r} .$$

$$\text{где } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r .$$

Проведя элементарные действия, получим

$$\bar{\rho}' = - \left(\frac{e\chi^2}{4\pi r} e^{-\chi r} \right) . \quad (2.3.34)$$

Выражение (2.3.34) показывает, что вблизи иона с зарядом $+e$ образуется ионное облако, имеющее противоположный знак заряда.

Полный заряд области равен

$$e' = \int_0^\infty \bar{\rho}' dV = - \int_0^\infty \frac{e\chi^2}{4\pi r} e^{-\chi r} r^2 dr \cdot 4\pi = -e\chi^2 \int_0^\infty r e^{-\chi r} dr = -e , \quad (2.3.35)$$

то есть вокруг данного положительно заряженного иона с большой вероятностью группируются ионы противоположного знака. Но полный заряд ионов облака, окружающих любой заданный ион, в точности равен заряду данного иона, но противоположен по знаку.

Наличие вокруг иона облака зарядов противоположного знака приводит к ослаблению (к экранировке) поля иона. Поэтому потенциал экранированного поля вблизи него убывает быстрее, чем кулоновский потенциал.

Величина $\frac{1}{\chi}$ представляет средний радиус ионного облака вокруг данного иона.

Задача №6

Согласно положениям квантовой механики, при рассмотрении состояния электрона в атоме нельзя говорить ни об орбите электрона, ни о его

местоположении и скорости. Волновая функция, являющаяся решением уравнения Шредингера, составленного для данного атома, непосредственного смысла не имеет. Квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности нахождения электрона в данный момент времени в окрестности некоторой точки пространства. Сам электрический заряд «размазан» в некотором объёме, причём наибольшая вероятность распределения электрического заряда как раз приходится на точки расположения так называемой «Боровской орбиты», которую ввёл Н. Бор в 1913 году, построив полуклассическую, полуквантовую теорию атома водорода.

Именно такое содержание слов «радиус Боровской орбиты» необходимо иметь в виду в тексте следующей задачи.

В атоме гелия два электронных облака (вероятности) проникают друг в друга и занимают одну и ту же область геометрического пространства. Плотность электронного облака (вероятности) каждого электрона зависит от расстояния до ядра r и выражается формулой

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi\alpha_1^3} \exp\left(-\frac{2r}{\alpha_1}\right) \quad (2.3.36)$$

~~Здесь~~ α_1 - радиус первой Боровской орбиты в атоме гелия He^+ , он равен половине радиуса Боровской орбиты в атоме водорода. $\alpha_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м. Однако отталкивание электронов в атоме гелия вызывает некоторое увеличение значения $\alpha_1 \approx 0,31 \cdot 10^{-10}$ м. Найти энергию взаимодействия электронных облаков.

Запишем условие задачи кратко.

Решение

Свяжем СО с ядром атома гелия.

Энергия взаимодействия непрерывно распределённых зарядов рассчитывается по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV. \quad (2.3.37)$$

Следовательно, первоочередной задачей является нахождение потенциала поля каждого электро-

на $\varphi(\mathbf{r})$. Для этого необходимо решить уравнение Пуассона при заданной

плотности заряда, либо определить напряжённость $E(\vec{r})$ по теореме Остроградского-Гаусса, а затем вычислить потенциал, исходя из формулы $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

Поскольку мы рассматриваем применение метода уравнения Пуассона, то решим задачу первым путём (читателю предоставляется возможность решить задачу вторым способом).

Уравнение Пуассона с учётом сферической симметрии задачи (решение не должно зависеть от углов θ и α) запишется так:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = -\frac{e}{\pi \varepsilon_0 \alpha_1^3} \exp\left(-\frac{2r}{\alpha_1}\right). \quad (2.3.38)$$

Проинтегрировав дважды (читателю необходимо выполнить эти действия, учитывая свой опыт, приобретённый при решении задач №4 и 5), получаем

$$\varphi(r) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \left(1 - e^{-\frac{2r}{\alpha_1}} - \frac{r}{a} e^{-\frac{2r}{\alpha_1}} \right). \quad (2.3.39)$$

Подставляем выражение (2.3.39) в формулу (2.3.37):

$$W = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4e}{\alpha_1^3} \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{2r}{\alpha_1}} - \frac{r}{\alpha_1} e^{-\frac{2r}{\alpha_1}} \right) r^2 e^{-\frac{2r}{\alpha_1}} dr. \quad (2.3.40)$$

Введём обозначения:

$$\frac{2r}{\alpha_1} = x; \quad r = \frac{\alpha_1}{2} x; \quad dr = \frac{\alpha_1}{2} dx.$$

Тогда вместо (2.3.40) получаем:

$$W = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \alpha_1} \int_0^\infty \left(x e^{-x} - x e^{-2x} - \frac{x^2}{2} e^{-2x} \right) dx. \quad (2.3.41)$$

Третий член интегрируем по частям:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = -\frac{x^2}{2} e^{-2x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty x e^{-2x} dx = \int_0^\infty x e^{-2x} dx.$$

Выражение (2.3.41), после нового интегрирования по частям (проделать самостоятельно), приведём к виду:

$$W = \frac{5}{8} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha_1} \quad (2.3.42)$$

§2.4. Метод электрических изображений

Этот метод решения электростатических задач иногда называют методом зеркальных отображений, или методом удовлетворения граничных условий. В каждом из этих названий содержится доля истины. Применим этот метод для решения следующей задачи.

Задача №7

Точечный заряд $+q$ находится на расстоянии a от плоской поверхности бесконечного проводника, занимающего все левое полупространство. Определить поле вне проводника и поверхностную плотность отрицательных зарядов, индуцированных на поверхности проводника.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	φ, ω
Дано	$+q$
	a
	ϵ_0

Решение

Свяжем СО с бесконечным проводником, занимающим левое полупространство. Поместим начало координат на границу раздела так, чтобы линия АО была перпендикулярна границе раздела.

Сделаем чертёж.

Прежде чем непосредственно приступить к решению задачи, проведём анализ условия задачи. Без уяснения некоторых моментов нельзя приступать к нахождению ответа.

Действительно, мы не можем воспользоваться принципом суперпозиции, так как мы не знаем, как распределяются индуцированные заряды на плоской поверхности проводника.

Не установлена и полная величина этих зарядов. Обратим внимание на то, что требуется найти поле вне проводника. Обсудим этот момент. Так как проводник простира-

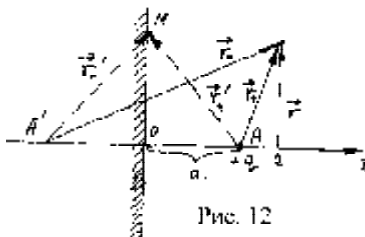


Рис. 12

ется до бесконечности, а, согласно одной из нормировок скалярного потенциала, в бесконечности потенциал равен нулю. Внутри проводника (если по нему не идёт ток) потенциал в любой точке имеет одно и тоже значение. В нашем случае вплоть до поверхности раздела потенциал всюду равен нулю. Ниже мы воспользуемся этим свойством потенциала (свяжем этот факт с одним из названий метода).

Применим не совсем традиционный метод. «Соберём» (мысленно) все индуцированные на поверхности проводника отрицательные заряды и поместим их внутри объёма проводника зеркально (обратите внимание на одно из названий применяемого метода!) с данным зарядом $+q$. Тогда решаемая задача существенно упрощается, так как нам необходимо найти результирующее поле от двух точечных зарядов: $+q$ и того отрицательного заряда, который равен сумме всех индуцированных зарядов.

Но почему такая замена индуцированных зарядов одним точечным зарядом, расположенным зеркально относительно границы проводника, законна в том смысле, что даёт решение задачи? На этот вопрос можно дать такой ответ: если полученное решение удовлетворит граничным условиям, то в силу единственности решения электростатических задач (что является отображением единственности реального мира), полученное решение и будет искомым.

Чтобы приступить к количественному решению, необходимо определить величину всех индуцированных зарядов. Чтобы найти ответ на этот вопрос, воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса в интегральной форме

$$\oint D_n dS = Q, \quad (2.4.1)$$

где интегрирование проводится по поверхности, охватывающей как заряд $+q$, так и заряд, индуцированный на поверхности проводника: Q - полный заряд, внутри объёма, охваченного поверхностью S .

Так как поверхность S охватывает все заряды, то вне поверхности интегрирования электростатического поля нет, следовательно D_n должно равняться нулю и весь интеграл даст нулевую величину для потока вектора электрической индукции за пределом поверхности S . Тогда и суммарный заряд Q , находящийся внутри объёма тоже равен нулю: $Q \equiv 0$. Полный заряд Q равен алгебраической сумме данного заряда $+q$ и индуцированных зарядов, величина которых, естественно, оказывается равной $-q$. Сделаем дополнения на рисунке.

Итак, согласно нашей гипотезе заряд $(-q)$ помещается зеркально с зарядом $(+q)$ и на основании принципа суперпозиции можно написать следующую формулу для потенциала точек, находящихся вне металлического полупространства:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right). \quad (2.4.2)$$

Убедимся, что формула (2.4.2) удовлетворяет граничным условиям.

Во-первых, на границе раздела (на поверхности проводника) потенциал должен равняться нулю, так как такое значение потенциала проводник имеет во всех точках. Как видно из чертежа, для любой точки поверхности проводника $r'_+ \equiv r'_-$ и $\varphi = 0$

Во-вторых, по условию нормировки потенциала (в силу его однозначности мы в данной задаче принимаем, что $\varphi_\infty \equiv 0$) на бесконечности мы

$$\text{действительно получаем } \varphi_\infty \equiv 0 \Big|_{\substack{r_+ \rightarrow \infty \\ r_- \rightarrow \infty}} \quad \varphi_\infty \equiv 0 \Big|_{\substack{r_+ \rightarrow \infty \\ r_- \rightarrow \infty}}$$

В силу единственности решения задач электродинамики, выражение (2.4.2) является ответом на первый вопрос задачи.

Чтобы найти распределение индуцированных зарядов по поверхности проводника, учтём, что относительно прямой AA' распределение зарядов обладает симметрией (смотри рисунок). Перепишем формулу (2.4.2) так:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + \alpha)^2}} \right). \quad (2.4.3)$$

Затем учтём граничные условия для скалярного потенциала на поверхности раздела при $z = 0$. (см. формулу (2.5)):

$$D_{2n} - D_{1n} = \omega, \quad (2.5)$$

$$\text{или } \epsilon_0 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \omega.$$

$$\text{Внутри проводника } E_{1n} = 0, \text{ и кроме того, } E_{2n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

В результате этих преобразований получаем

$$\omega = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2.4.4)$$

Взяв от (2.4.3) производную по z при $z = 0$, получаем:

$$\omega = -\frac{aq}{2\pi R^3}, \quad (2.4.5)$$

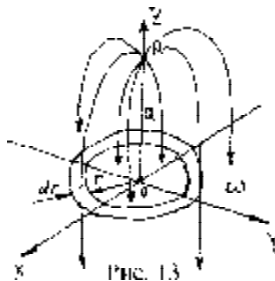
где $R = \sqrt{a^2 + r^2}$.

Представляет интерес определить полную величину

индуцированного заряда $q_{\text{инд}}$ (см. Рис. 13):

$$q_{\text{инд}} = \int_0^{\infty} \omega \cdot 2\pi r dr = -q \int_0^{\infty} \frac{ar dr}{\sqrt{(\alpha^2 + r^2)^3}} = -q.$$

Закрепим применение метода электрических изображений при решении ещё одной задачи.



Задача №8

На некотором расстоянии друг от друга находятся два точечных заряда $+q_1$ и $-q_2$. Определить поверхность, на которой потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) \text{ равен нулю.}$$

Запишем условие задачи кратко.

Решение

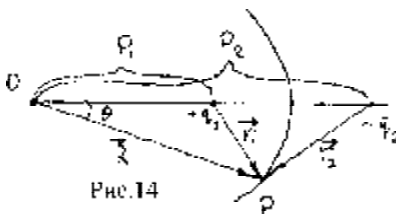
Свяжем СО с первым зарядом q_1 , но для общности начало координат не будем совмещать с этим зарядом q_1 .

Сделаем чертёж.

Не зная соотношение величины зарядов q_1 и q_2 , нет смысла рассуждать, где может проходить искомая поверхность нулевого потенциала. Поэтому предположим, что эта поверхность

пересекает линию, соединяющую заряды, между ними.

Несмотря на то, что, в отличие от задачи №7, мы не используем зеркального отображения, решаемая задача всё же относится к задачам, решаемых методом электрических изображений. Дело в



том, что при обсуждении задачи №7 говорилось, что этот метод имеет и другие названия, в частности его, называют методом удовлетворения граничных условий. На искомой поверхности результирующий потенциал равен нулю - это и есть граничное условие в данной задаче. Используя чертёж и теорему элементарной геометрии - теорему косинусов - можно составить следующие два равенства

$$\begin{aligned} r_1^2 &= p_1^2 + R^2 - 2p_1R \cos \theta \\ r_2^2 &= p_2^2 + R^2 - 2p_2R \cos \theta \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Из условия задачи

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) \equiv 0$$

следует соотношение $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$. (2.4.7)

Возведём соотношение (2.4.7) в квадрат и воспользуемся формулами (2.4.6). После элементарных действий, получаем:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{\frac{R^2}{p_1} + p_1 - 2R \cos \theta}{\frac{R^2}{p_2} + p_2 - 2R \cos \theta} \quad (2.4.8)$$

Положение точки **O** - начало координат, выбрано совершенно произвольно. Поэтому потребуем, чтобы положение точки **O** удовлетворяло условию:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (2.4.9)$$

Тогда равенство (2.4.8) существенно упрощается

$$1 = \frac{\frac{R^2}{p_1} + p_1 - 2R \cos \theta}{\frac{R^2}{p_2} + p_2 - 2R \cos \theta} \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{p_1} + p_1 - 2R \cos \theta = \frac{R^2}{p_2} + p_2 - 2R \cos \theta .$$

После сокращения подобных членов, получаем

$$\frac{R^2}{p_1} + p_1 = \frac{R^2}{p_2} + p_2, \text{ или } \frac{R^2}{p_1} - \frac{R^2}{p_2} = p_2 - p_1,$$

откуда, после приведения к общему знаменателю и сокращения на $(p_2 - p_1)$, получаем $R^2 = p_1 p_2$, или $R = \sqrt{p_1 p_2} = \text{const.}$ (2.4.10)

Равенство (2.4.10) определяет положение тех точек, потенциал которых равен нулю. Все эти точки равноудалены от начала координат. Такое геометрическое место точек есть не что иное, как окружность.

При решении задачи мы воспользовались «подсказкой» интуиции, которая вырабатывается при большом личном опыте...

§2.5. Энергия электростатического поля.

Теория Максвелла (завершенная А. Эйнштейном в специальной теории относительности, в которой электромагнитное поле само рассматривается как вид материи, наряду с веществом, но со своими специфическими свойствами) является теорией, основанной на принципе близкодействия. Поэтому энергия поля рассредоточена по всему объёму, где находится электромагнитное поле.

Согласно принципу дальнего действия, на который опиралась электродинамика Кулона-Ампера, энергия системы точечных зарядов рассчитывается по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} q_i \cdot \varphi_{ik} \quad (2.5.1)$$

где $\varphi_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}$

Формула (2.5.1) симметрична относительно индексов i и k . Она определяет потенциальную энергию взаимодействия точечных зарядов.

Фактически формула (2.5.1) не является полевой, не учитывает реальность электростатического поля. Величина φ_{ik} выполняет по сути дела крат-

кое обозначение величины $\varphi_{ik} = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{ik}}$.

Иначе обстоит дело в теории Максвелла. Первичным и основным понятием в этой теории является поле, обладающее энергией. Расчёт этой ве-

личины производится по формуле

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV. \quad (2.5.2)$$

Если формула (2.5.1) может дать как величину, большую, или меньшую, или даже равную нулю, то формула (2.5.2) всегда определяет положительную величину. Пусть в простейшем случае

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, тогда выражение (2.5.2) запишется так:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E_1^2 dV + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E_2^2 dV + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int 2(\vec{E}_1 \vec{E}_2) dV, \quad (2.5.3)$$

где последний член определяет энергию взаимодействия полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E_1^2 dV + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E_2^2 dV \geq \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int 2(\vec{E}_1 \vec{E}_2) dV. \quad (2.5.4)$$

Для закрепления данного учебного вопроса решим несколько задач.

Задача №9

По объёму шара радиусом a равномерно распределён заряд q . Определить собственную энергию электростатического поля, окружающего заряды.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	W
Дано	q a ε_0

Решение

Свяжем систему отсчета с шаром, поместив начало координат в центр шара. Такой выбор СО позволяет обнаружить только одно проявление единого электромагнитного поля - электростатическое.

Обратим внимание на некоторые выражения в условии задачи: «определить собственную энергию электростатического поля, окружающего заряды».

Очень часто можно слышать (и читать) такое утверждение: «электростатическое поле созданное зарядами». В этой фразе утверждается, что заряды выполняют роль первичной субстанции (причины), создающей (как следствие) в окружающем пространстве электростатическое поле. Спросим себя: может ли существовать «голый заряд», без поля? Нет, не может, так как заряд и его поле - две неразрывные части.

Нужно всегда говорить о сосуществовании заряда и его поля (в даль-

нейшем мы вернёмся к этому утверждению и покажем, что при выполнении прямого утверждения, обратное может быть неверным).

Сделаем чертёж. На чертеже отмечены две точки «наблюдения» P_1 и P_2 . Дело в том, что для нахождения энергии поля, нам нужно знать напряженность поля $\vec{E}$ (см. формулу (2.5.2)). Характер изменения поля внутри и вне шара - разный. В силу аддитивности энергии, найдём энергию поля внутри и вне шара и сложим эти составляющие полной энергии. Формулу (2.5.2) перепишем так:

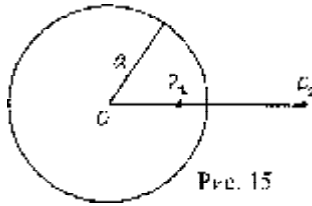


Рис. 15

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E_i^2 dV + \frac{1}{2 \varepsilon_0} \int E_e^2 dV = W_i + W_e \quad (2.5.5)$$

где W_i и W_e - энергии поля внутри и вне шара соответственно. Напряжённость E_i и E_e были определены в задаче №4:

$$E_i = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^3} r; \quad E_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_e^2}. \quad (2.5.6)$$

В силу сферической симметрии задачи элемент объёма $dV = 4\pi r^2 dr$, поэтому интегрирование в формуле (2.5.5) производится элементарно:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left\{ \int_0^a \frac{q^2}{a^6} r^4 dr + \int_a^\infty \frac{q^2}{r^2} dr \right\} = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 a}. \quad (2.5.7)$$

Используя определение скалярного потенциала $\vec{E} = -grad\varphi$ и четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме $div\vec{D} = \rho$, а так же пятое уравнение $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, можно получить и другое выражение для электростатической энергии объёмных непрерывно распределённых зарядов (читателю предоставляется самостоятельно провести эти преобразования):

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (2.5.8)$$

В той же задаче №4 было получено выражение для φ_i внутри шара. Так как вне шара зарядов нет, то интегрирование в (2.5.8) нужно произвести только по объёму шара. Воспользуемся формулой (2.3.13):

$$\varphi_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(a^2 - \frac{r_i^2}{3} \right), \quad (2.3.13)$$

где принято, что $\varepsilon = 1$

Снова воспользуемся сферической симметрией задачи ($dV = 4\pi r^2 dr$).

Тогда

$$W = \frac{\rho^2}{4\varepsilon_0} \int_{\text{по объёму шара}} \left(a^2 - \frac{r_i^2}{3} \right) dV = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}, \quad (2.5.9)$$

где учтено, что $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

Отметим совпадение формул (2.5.9) и (2.5.7) ($e \equiv q$).

Иначе и быть не могло, так как мы определили собственную энергию единственного материального объекта - энергию электростатического поля зарядов, непрерывно распределённых по объёму шара.

Задача №10

Считая, что заряды протонов равномерно распределены по объёму ядра, представляющего собой шар, радиуса R , подсчитать энергию электростатического взаимодействия протонов в ядре атома с порядковым номером Z .

Запишем условие задачи кратко.

Найти	W
Дано	Z
	e
	R

Решение

Как и в предыдущей задаче (2-ой вариант её решения), в данной задаче рассматривается совокупность Z протонов, электрические заряды которых «размазаны» в одном и том же объёме ядра радиуса R .

Целесообразно со связать с ядром, поместив начало координат в центр ядра. Если определить энергию взаимодействия одной пары протонов, то, зная, сколько пар протонов



Рис. 16

содержится в ядре, можно определить полную электростатическую энергию взаимодействия Z протонов в ядре.

$$W = W_0 \cdot C_z^2, \quad (2.5.10)$$

$$\text{где } C_z^2 = \frac{Z(Z-1)}{2} \quad (2.5.11)$$

формула комбинаторики для подсчёта числа пар, которые можно составить из Z элементов, W_0 - энергия взаимодействия пары протонов.

В задаче № 9 было дано указание, как можно получить формулу (2.5.8).

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV \quad (2.5.8)$$

Но в этой задаче данная формула является исходной, поэтому сделаем её вывод, исходя из основной формулой (2.5.2):

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV \quad (2.5.2)$$

Произведём следующие преобразования.

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2} \int \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = -\frac{1}{2} \int D \nabla \varphi dV, \quad (2.5.12)$$

где использовано 5-е уравнение Максвелла $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (для вакуума) и формула, определяющая скалярный потенциал (2.2) $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$.

Продолжим преобразование, применив формулу векторного анализа :

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \mathbf{D} \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \mathbf{D}, \text{ откуда}$$

$$-\mathbf{D} \nabla \varphi = \varphi \text{div} - \text{div}(\varphi \mathbf{D}) \quad (2.5.13)$$

Заменим подынтегральное выражение в (2.5.12), используя 4-е уравнение Максвелла (2.3): $\text{div} \mathbf{D} = \rho$, а во втором члене распространим интегрирование на весь объём, где существует электрическое поле (за пределами этого объёма поля не будет), используя теорему Остроградского-Гаусса, перейдём к поверхностному интегралу. Но так как мы включили в объём интегрирования всё пространство, то на границе его нормальная проекция вектора $\mathbf{D}$ равна нулю $D_n = 0$ и весь интеграл обращается в нуль.

$$\text{Итак, } W_0 = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV \quad (2.5.15)$$

где ρ – объёмная плотность электрического заряда одного протона, φ – потенциал поля в некоторой точке объёма ядра другого протона, заполняющего объём ядра.

В задаче №4 был рассчитан потенциал внутри шара, по объёму которого равномерно распределён заряд с объёмной плотностью ρ :

$$\varphi_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (2.3.13)$$

Составляем выражение (2.5.15):

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0} \int_0^R \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}, \quad (2.5.16)$$

где учтено, что $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Окончательно полная энергия взаимодействия всех пар протонов равна

$$W = W_0 \cdot C_z^2 = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} \cdot \frac{Z(Z-1)}{2} = \frac{3Z(Z-1)}{2 \cdot 20\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}. \quad (2.5.17)$$

Интересно отметить, что квантовомеханический расчёт величины W даёт почти такой же результат. Очевидно, что в использованной модели ядра для подсчёта величины W содержится независящий от теории момент - это возможность ограничиться учётом только парных взаимодействий.

Задача №11

Вычислить энергию и ёмкость сферического конденсатора.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, совершим небольшую историческую экскурсию. Слово «конденсатор» в переводе с латинского означает «накопитель». Впервые это слово вошло в теорию электрических явлений в 1745 году, когда голландский физик П. Мушенбрек сообщил из Лейдена об эксперименте, который вошел в историю под названием «Лейденского опыта». Через тело Мушенбрека прошел ток разряда первого конденсатора - «лейденской банки» - стеклянной банки, внутренняя и наружная поверхности которой покрыты проводящим слоем.

Так было открыто принципиально важное свойство электричества -

способность его накапливаться. Вот уже два с половиной века конденсатор «верой и правдой» служит не только в научных исследованиях. Без него, его разных модификаций и размеров, практически не обходится ни одно электро- и радиотехническое устройство. Вскоре после изобретения накопителя электрических зарядов было установлено, что этим свойством обладает любой проводник. Величина накопленного заряда зависит как от геометрии самого проводника, так и от присутствия других проводников, разделённых диэлектриком. Конденсаторы можно соединять в батареи как параллельно, так и последовательно. Представляет интерес и этимология слова «конденсатор» и связанного с ним слова «электроёмкость». В начале XVIII века французский исследователь Шарль Дюфе пришел к выводу, что существует положительное и отрицательное электричество. Для возможности количественного описания электрических явлений Дюфе изобретает электроскоп, что и позволило ему обнаружить два рода электрической жидкости. Именно потому, что электричество рассматривали как некую жидкость, стали употреблять такие слова, как «электроёмкость» и им соответствующие.

После таких кратких исторических замечаний, перейдем к решению нашей задачи.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	W, C
Дано	R_1
	R_2
	q
	ϵ_0

Решение

Систему отсчёта свяжем с конденсатором, что упростит решение задачи, так как мы будем иметь чисто электростатическое поле. Начало координат совместим с центром коаксиальных сфер и выберем сферическую систему координат, что отразит симметрию задачи.

Сделаем чертёж (сечение сферического конденсатора плоскостью чертежа). Мы знаем, по крайней мере, две формулы для расчёта энергии конденсатора (любой формы). Это следующие формулы:

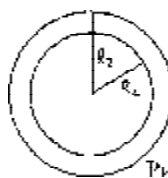


Рис. 17

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV \quad (2.5.18)$$

$$\text{и } W = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.5.19)$$

Во вторую формулу входит неизвестная величина C - ёмкость конденсатора, которую мы должны ещё определить. Воспользуемся для этого формулой (2.5.18).

Мы уже знаем, что внутри сплошного или пустого проводника электростатического поля нет. Поэтому электростатическое поле, сосредоточенное между сферическими поверхностями (на которых по определению должны находиться равные и разноимённые заряды), принадлежит лишь зарядам, расположенным на внутренней сфере. В задаче №1 было доказано, что вне шара (сферы) поле сферы совпадает с полем равновеликого точечного

заряда, расположенного в центре сферы: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Тогда можно подсчитать энергию нашего конденсатора, используя формулу (2.5.18): $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$ где $dV = 4\pi r^2 dr$.

Составим формулу (2.5.18):

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad (2.5.20)$$

Для нахождения ёмкости сферического конденсатора воспользуемся законом сохранения и превращения энергии и формулой, с помощью которой вводится электроёмкость как физическая величина:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (2.5.21)$$

Чтобы зарядить конденсатор, нужно его присоединить к источнику постоянного тока. При перемещении заряда dq источником тока будет совершаться работа (и, соответственно, затрачено эквивалентное количество энергии)

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q dq}{C}, \quad (2.5.22)$$

где использовано выражение (2.5.21).

Полная работа по перемещению заряда q , а, следовательно, запасённая конденсатором энергия, равна

$$W = A = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C} . \quad (2.5.23)$$

Объединяя формулы (2.5.20) и (2.5.23), в которых слева стоит одна и та же величина, получаем возможность выразить ёмкость сферического конденсатора через его геометрические характеристики и диэлектрическую постоянную среды ε_0 заполняющей пространство между сферами

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} . \quad (2.5.24)$$

При анализе задачи отмечалось, что любое проводящее тело обладает определённой ёмкостью (присутствие других тел лишь изменяет электрическую ёмкость данного проводника). Таким сферическим проводником является Земля. Представляет интерес определить электроёмкость Земли, используя формулу (2.5.24). Для этого предположим мысленно, что наружная сфера удалена в бесконечность, то есть $R_2 \rightarrow \infty$

Проведём элементарные преобразования в формуле (2.5.24)

$$C_{\text{Земля}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)} \bigg|_{R_2 \rightarrow \infty} \approx 4\pi\varepsilon_0 R_1 \quad (2.5.25)$$

Примем за средний радиус Земли величину $R_1 = 6400000\text{м}$. Тогда

$$C_{\text{Земли}} = 4 \cdot 3.14 \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot 6400000\text{м} \cong 0.71 \cdot 10^{-3} \Phi$$

Существуют электролитические конденсаторы типа КБ (конденсатор бумажный), размеры которых в 10^9 степени раз меньше размеров Земли, но обладающих сравнительными с ней емкостями. В этом как раз и проявляется наличие других тел, геометрическая форма и свойства среды, разделяющей «пластины» электролитического конденсатора.