

Раздел 2.

Задачи по макроскопической электродинамике

Глава I

§1. Уравнения Максвелла.

Электродинамика изучает свойства зарядов, токов и их полей, через посредство которых осуществляется взаимодействие зарядов и токов.

В основе макроскопической электродинамики лежат уравнения Максвелла, которые выполняют в этой теории роль постулатов (начал), подобно тому, как постулатами классической механики являются законы Ньютона, постулатами термодинамики являются ее начала, постулатами специальной теории относительности - принципы относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света и предельности её в вакууме.

Все постулаты, в том числе и уравнения Максвелла, имеют как дифференциальную, так и интегральную форму записи. Физический смысл обеих форм записи одинаков, отличаясь лишь геометрической областью применимости: дифференциальная форма записи описывает явление в бесконечно малой окрестности некоторой точки; интегральная форма записи описывает явление в конечном объёме, на поверхности или в контуре.

В методических целях уравнения Максвелла нумеруются.

Итак,

I уравнение Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} N \quad (1.1)$$

где $N = \int D_n dS$, утверждает, что ток проводимости и ток смещения окружены вихревым магнитным полем.

II уравнение Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi, \quad (1.2)$$

где $\Phi = \int B_n dS$,

выражает явление электромагнитной индукции: при всяком изменении во времени потока магнитного поля вокруг него возникает вихревое электрическое поле. Для выполнения закона сохранения и превращения энергии необходимо с одной стороны равенства ввести знак «минус» (правило Ленца).

III уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{и} \quad \oint \vec{B}_n dS = 0 \quad (1.3)$$

утверждает, что линии вектора магнитной индукции - замкнутые линии, т.е., другими словами, свободных магнитных зарядов не существует.

IV уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{и} \quad \oint \vec{D}_n dS = q \quad (1.4)$$

является по сути дела теоремой Гаусса, утверждает, что силовые линии вектора электрического поля (по договорённости) начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах.

V и VI уравнения Максвелла

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (1.6)$$

справедливы для однородных и изотропных сред.

VII уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{и} \quad I = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (1.7)$$

Эти уравнения утверждает неуничтожимость электрического заряда. Знак «минус» связан с договорённостью, считать направление потока электрических зарядов положительным, если он выходит из некоторого объёма наружу.

VIII уравнение Максвелла

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{E}^{cmp} \right) \quad \text{и} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (1.8)$$

является записью закона Ома.

Добавим к этим основным уравнениям формулу закона сохранения и превращения энергии в электромагнитных процессах. В дифференциальной форме она имеет вид:

$$\operatorname{div} \left[\frac{\vec{r} \vec{r}}{EH} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2}{2} + \frac{j^2}{\sigma} = \vec{j} \vec{E}^{cmp} \quad (1.9)$$

которую в таком виде можно прочесть так (в единице объёма в единицу времени): энергия источника сторонних сил расходуется на излучение электромагнитной энергии ($\text{div}[\vec{E}\vec{H}] = \text{div}\vec{S}$) изменение объёмной плотности электромагнитной энергии и частично превращается во внутреннюю энергию («джоулево тепло») вещественных проводников.

В замкнутой системе, состоящей из излучения и заряженных частиц, суммарное количество движения есть интеграл системы:

$$\vec{P}_{\text{частиц}} + [\vec{D}\vec{B}] = \text{const} , \quad (1.10)$$

где $[\vec{D}\vec{B}]$ плотность импульса электромагнитного поля.

На границе раздела двух однородных сред векторы поля удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \omega , \\ B_{2n} &= B_{1n}, \\ E_{2\tau} &= E_{1\tau}, \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} &= i , \end{aligned} \quad (1.11)$$

где индексы n и τ определяют поведение соответственно нормальных и тангенциальных компонент векторов, а ω и i - поверхностная плотность зарядов и тока.

В силу непрерывности электромагнитного поля в одном и том же объёме может находиться любое количество одноимённых и разноимённых полей. В случае сложения одноимённых полей результирующая векторная характеристика поля находится по правилу сложения векторов. В этом состоит суть принципа суперпозиции одноимённых полей.

В силу сложности решения уравнений Максвелла (в общем случае), вводятся вспомогательные функции, не имеющие непосредственного физического смысла, но существенно упрощающие решение системы уравнений Максвелла. Эти вспомогательные функции вводятся так:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (1.12)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.13)$$

Легко показать, что введённые вспомогательные функции $\vec{A}$ и φ , неоднозначны. Но благодаря им вся система уравнений Максвелла сводится к одному уравнению - уравнению Даламбера:

$$\Delta \Phi_i - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} = -\chi_i, \quad (1.14)$$

$$\text{где } \Phi_1 = A_x; \Phi_2 = A_y; \Phi_3 = A_z; \Phi_4 = \varphi; \quad (1.15)$$

$$\chi_1 = \mu \mu_0 j_x; \chi_2 = \mu \mu_0 j_y; \chi_3 = \mu \mu_0 j_z; \chi_4 = \frac{P}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (1.16)$$

В уравнении Даламбера содержатся все частные случаи электромагнитных задач.

Вдали от зарядов и токов $\chi_i = 0$, уравнение Даламбера переходит в волновое уравнение, решение которого указывает на конечную скорость распространения электромагнитных волн, частным случаем которых являются световые волны.

Если рассматривается стационарный (статический) процесс, пренебрегая членом $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$, получаем уравнение Пуассона:

$$\Delta \Phi_i = -\chi_i. \quad (1.17)$$

Если же рассматривается область вдали от зарядов и токов ($\chi_i = 0$), уравнение Максвелла переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta \Phi_i = 0 \quad (1.18)$$

Решения всех этих уравнений известны. В этом и заключается полезность введения вспомогательных функций $\vec{A}$ и φ .