Раздел 6. «Специальная теория относительности»

Задача №1. Роль системы отсчета при решении физических задач

Среди физических понятий, смысл которых пересмотрела или углубила специальная теория относительности (СТО), особое место занимает «система отсчета», определяющая содержание первого постулата Эйнштейна в СТО.

Напомним читателю некоторые сведения о системах отсчета. Понятие «система отсчета» (СО) возникло при расширении понятия «система координат», введенной еще Р. Декартом (вспомним о декартовой системе координат). В классической физике в СО помимо системы координат включали тело отсчета (с которой связывают начало системы координат), масштаб (с помощью которого метризуют пространство) и часы (ход которых не зависит от их состояния). При метризации пространства (определение координат всех его точек) считалось, что от перемещения масштаба его метрические свойства не изменяются. Масштаб считался абсолютно твердым телом, отсюда непосредственно следовало существование бесконечной скорости передачи сигнала (информации), что и лежит в основе «дальнодействия». Из независимости хода часов от их состояния следовало, что во всей Вселенной существует единое время.

Как известно читателю, анализ и критика этих фундаментальных положений классической физики привели А. Эйнштейна в 1905 г. к построению современной физической теории пространства, времени и движения, получившей название «Специальная теория относительности».

Исходя из 1-го постулата СТО («Во всех инерциальных системах отсчета (ИСО) все физические явления при одинаковых условиях протекают одинаково»), расширим понятие «Система отсчета» до представления о физической лаборатории, включающей все необходимые условия и приборы для наблюдения и изучения физических (любых, а не только механических!) явлений. К сожалению, у части учащихся сложились упрощенные представления о СО, в частности, считается что СО «работает» только в механике. Различают инерциальные и неинерциальные СО. В первых обязательно выполняются все три закона механики. В этой главе мы будем работать только с инерциальными системами отсчета, ибо только в них справедливы утверждения СТО.

Ниже, на примере простой задачи будет показано, как важно, понимая содержание условия задачи (это главное при решении задач!), удачно выбрать СО. В слове «удачно» нет ничего крамольного. Дело в том, что с точки зрения принципа относительности (и в формулировке Галилея и Эйнштейна) все ИСО равноправны, любой из них можно пользоваться (а их бесчисленное множество!). Важно выбрать такую ИСО, в которой наиболее ясно будет представлено физическое явление и в которой ему можно дать наиболее простое математическое описание.

Итак, рассмотрим решение следующей задачи. Лодочник, проплывая под мостом против течения, потерял запасное весло. Через некоторое время он обнаружил отсутствие весла, развернул лодку и через час в трех километрах ниже моста догнал весло. Определить скорость течения воды.

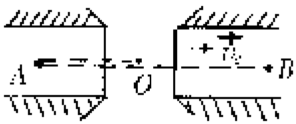
Запишем условие задачи кратко и приступим к анализу ее условия.

Найти	$v_в$
Дано	$t=1ч$ $l=3км$

Решение

В большинстве задачников по физике (особенно для учащихся средних школ) условия задач излагаются в СО «Земля», хотя в тексте об этом ни разу не упоминается. Создается впечатление, что СО «Земля» является особой, чем-то отличающейся от других. И это несмотря на то, что, согласно принципу относительности, все инерциальные СО равноправны. Важным событием, существенно изменившим отношение к роли выбора СО, явился запуск искусственного спутника Земли (1957 г., СССР). Практически впервые огромный круг физических явлений стало возможным изучать в необычной СО - «Спутник Земли». Учителям стало необходимо «приучать» учащихся к необходимости в самом начале решения физических задач выбирать «наилучшую» СО, т.е. такую, в которой и процессы представлялись понятнее и математическое решение получалось проще. На примере данной задачи мы покажем, какую важную роль играет этот этап решения задачи - этап выбора СО. Предлагаемую задачу мы решим в двух равноправных ИСО и сделаем вывод из сопоставления решений.

Вариант 1.



Выберем «стандартную» СО «Земля» («Берег»). На рисунке представлен чертеж, соответствующий условию задачи в этой СО. Точка *O* - это место потери весла, т. *A* - место разворота лодки, т. *B* - место встречи лодочника с веслом. Нам известно расстояние *OB=3км* и время t движения лодочника на пути *AB*. Это время *t* отличается от времени движения весла на пути *OB* на то время *t',* которое потребовалось лодочнику для преодоления расстояния *OA*. Иногда (у нас как раз тот случай) приходится вводить такие величины, которые по условию задачи не даны, в процессе решения от них избавляются. Так мы поступим и сейчас. Можно составить следующие три равенства, учитывающие, согласно классической теореме сложения скоростей, что скорость лодки при движении против течения равна $(v - v_в)$, при движении по течению - $(v + v_в)$, где v - скорость лодки в стоячей воде, $v_в$ - скорость течения воды в СО «Берег»:

$OB = v_в(t + t')$ - путь весла,

$OA = (v - v_в)t'$ - путь лодки до поворота,

$AB = (v + v_в)t$ - путь лодки от поворота до встречи с веслом.

Из чертежа видно, что

$$AB = OA + OB,$$

или $$(v + v_в)t = (v - v_в)t' + v_в(t + t').$$

После раскрытия скобок и сокращения подобных членов получаем, что

$$t = t'.$$

Таким образом, полное время движения весла со скоростью воды (вместе с водой) равно $T = t + t' = 2t$.

За это время весло проплыло со скоростью воды расстояние

$$l = v_в T,$$

откуда $$v_в = \frac{l}{T} = \frac{3км}{2г} = 1{,}5км/г$$

Несмотря на кажущуюся простоту решения, чрезвычайно трудным моментом его является введение вспомогательного времени t', числовое значение которого не дано в условии задачи и не известно, как его можно рассчитать. Кроме того, решение получилось не столько физическим, сколько математическим.

Рассмотрим другой способ решения этой же задачи, пользуясь правом выбора другой инерциальной СО.

Вариант 2.

Поставим перед собой вопрос: «Нет ли такой ИСО, в которой задача решалась бы более физично, без введения вспомогательного времени t', с большим осмыслением физических понятий, встречающихся в задаче?» Такой системой отсчета является СО «Вода». В этой СО, естественно, вода неподвижна, неподвижно и весло, т.е. в этой СО весло никуда не уплывает, и лишь лодка удаляется и приближается к веслу. При выборе этой СО мы воспользуемся принципом относительности, равноправием всех ИСО, относительностью равномерного и прямолинейного движения и покоя: в СО «Берег» берег неподвижен, но движется вода, в СО «Вода» - вода неподвижна, движется берег в сторону, противоположную движению воды в СО «Берег».

В рассматриваемой СО лодка движется в стоячей воде, поэтому ей потребуется одно и то же время для удаления и приближения к веслу. А так как время (промежутки времени) в классической физике является абсолютной величиной (промежуток времени чередования двух событий во всех ИСО имеет одно и то же численное значение). И если в СО «Берег» лодочнику требовался 1 час для движения от момента поворота до встречи с веслом, то и в СО «Вода» на этот путь потребуется один час. А так лодка движется в стоячей воде, то и на удаление от весла до места поворота тоже требуется один час. Таким образом, лодка в движении находилась 2 часа. Это же время находилось в движении и весло в СО «Берег», проплыв за это время *3км*. Следовательно, скорость движения весла (и воды) равна:

$$v_в = \frac{l}{T} = \frac{3км}{2r} = 1,5км / r \ .$$

При решении задачи по второму варианту, благодаря праву выбора другой равноправной ИСО, пришлось «потревожить» в памяти принцип относительности и такие важные для физики понятия, как абсолютность хода времени в классической физике,абсолютность в ней длины (расстояния), относительность скорости, инвариантность события (встреча с веслом произойдет в любой ИСО), существенно упростить математические расчеты. Нет сомнения, что тот, кто ищет ФИЗИКУ в ЗАДАЧАХ, а не только численный ответ, выберет для решения второй вариант.

Задача №2. Относительность одновременности в специальной теории относительности (СТО)

Очень часто для доказательства относительности одновременности в СТО используют мысленный эксперимент по распространению света в так называемом «вагоне Эйнштейна». Под мысленным экспериментом в современной физике понимают такой опыт, который не противоречит законам природы, но который по техническим причинам или трудно, или невозможно поставить. «Вагон Эйнштейна» в нашей задаче будет рассматриваться как подвижная инерциальная система отсчета (ИСО), это достаточно длинный железнодорожный вагон, который движется относительно наблюдателя, находящегося на Земле («Стрелочника»), равномерно и прямолинейно. «Мысленность» этого опыта обусловлена как тем, что вагон не может быть таким длинным, каким он должен быть у нас, так и тем, что на Земле рельсы не могут простираться прямолинейно до бесконечности, как это требуется для равномерного прямолинейного (инерциального) движения вагона.

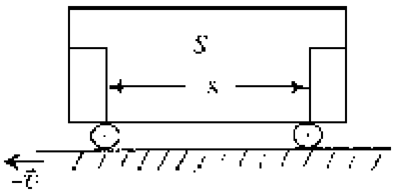
Суть опыта в следующем. Посередине вагона находится источник света. Световая вспышка достигает торцов вагона, там установлены фотоэлементы. Фототок, усиленный приборами, заставляет открываться торцовые двери вагона. В ИСО «Вагон», в которой описан опыт, двери откроются одновременно, так как по второму постулату СТО скорость света по всем направлениям одинакова, а двери отстоят от источника света на равном расстоянии.

Но посмотрим на этот эксперимент глазами «Стрелочника». Его видение мы и изложим как решение задачи.

Найти	$\Delta t'$
Дано	$\Delta t = 0$ $\vec{v}$

Решение

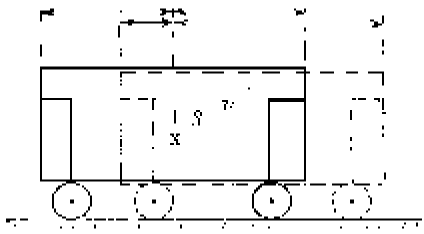
Выбор ИСО уже сделан: это условно неподвижная ИСО «Стрелочник» и, соответственно, подвижная - «Вагон Эйнштейна».



Обсудим еще раз наш мысленный опыт в ИСО «Вагон Эйнштейна». Выше говорилось об одновременности прихода световых сигналов в вагоне к его дверям, расположенным на равном расстоянии от источника света.

Но что значит «одновременно»? Анализ содержания этого понятия, проведенного самим А. Эйнштейном при построении СТО, показал, что строгого определения этого понятия в классической физике не было. Одновременность воспринималась интуитивно: одновременно - это значит в один и тот же момент времени. А что означает «в один и тот же момент времени»? И так далее... Поэтому А. Эйнштейн дал следующее толкование понятия одновременности: если источник света находится посредине вагона, то торцовые автоматически открывающиеся двери откроются одновременно в ИСО «Вагон». Можно воспользоваться «зеркальным» опытом для определения понятия «одновременность». Пусть посредине вагона находится устройство, срабатывающее лишь в том случае, если в него с торцов вагона придут два сигнала в один и тот же момент времени. Утверждается, что в этом случае оба сигнала, вышедшие из источников, расположенных в торцах вагона, были испущены одновременно в ИСО «Вагон».

На первый взгляд, все эти рассуждения кажутся простыми. Но это совсем не так, если провести рассуждения в ИСО «Стрелочник» и при этом руководствоваться постулатами СТО. Второй постулат СТО утверждает существование сигнала, несущего информацию, скорость которого максимальна и предельна. Таким сигналом является световой сигнал, в вакууме его скорость наибольшая и одинакова по всем направлениям, независимо от того, движется ли источник света или покоится в данной ИСО (если пространство заполнено веществом с показателем преломления больше единицы, то в этой среде скорость электромагнитных волн меньше, чем в вакууме во столько раз, во сколько раз показатель преломления больше единицы: в такой среде элементарные частицы могут двигаться со скоростью, большей, чем скорость электромагнитных волн в данной среде, но эта скорость все равно будет меньше скорости этих волн в вакууме).



Представим на рис. схему опыта в ИСО «Стрелочник». С точки зрения «стрелочника» свет, испущенный источником, достигнет передней двери позже, чем задней, так как передняя дверь удаляется от световой вспышки, а задняя набегает на нее (при этом мы не должны забывать, что утверждает 2-ой постулат СТО!). Хотя открывание дверей произойдет и в ИСО «Стрелочник» (событие - инвариантно, оно наступает в любой ИСО), но уже не в один и тот же момент времени, не одновременно. Таким образом, в СТО одновременность из ранга абсолютных понятий перешла в ранг относительных: то, что происходит одновременно в одной ИСО, не будет одновременным в другой ИСО, если эти ИСО движутся относительно друг друга.

Как видно из предыдущих рассуждений, неодновременность открывания дверей в ИСО «Стрелочник» обусловлена вторым постулатом СТО. Если же отказаться от постулатов СТО (не только от второго, но и от первого, как это показал сам А. Эйнштейн, на одном первом постулате построить СТО нельзя!) и перейти на позиции классической физики с ее постулатом о существовании бесконечно быстрого сигнала, то мы тотчас же получим абсолютность одновременности, как это и считалось всегда в классической физике.

Для завершения решения задачи остается записать, что, если Δt в ИСО «Вагон Эйнштейна» равняется нулю (сигналы одновременно приходят к фотоэлементам), то в ИСО «Стрелочник» $\Delta t' \neq 0$, т.е. открывание дверей в этой ИСО будет происходить неодновременно.

Задача №3. Относительность длины и промежутка времени в СТО

В отличие от классической физики, в которой длина объекта и длительность процесса считаются абсолютными величинами, т.е. во всех ИСО эти величины имеют соответственно одно и то же численное значение, в СТО эти величины из ранга абсолютных (инвариантных) величин перешли в ранг относительных величин. Это означает, что протяженность тела (в направлении движения) имеет иное численное значение, чем в той ИСО, где это тело неподвижно.Соответственно и длительность процесса в разных ИСО, движущихся относительно друг друга, разная. Эти противоречащие житейскому «здравому смыслу» выводы СТО, вместе с тем, не отрицают объективной протяженности тела и некоторой длительности процесса. Нельзя выбрать какую-то ИСО, в которой у тела не было бы пространственной протяженности и процесс не имел бы длительности.

Именно в этом следует видеть «здравый смысл» СТО. А то, что числовые значения ряда величин разные при проведении измерений из разных ИСО, не так уж непривычно. Ведь и в классической физике координата события, величина скорости, а, следовательно, и кинетической энергии, а отсюда и величина возможной работы, в разных ИСО были разные. И мы с этими относительностями свыклись, считали это соответствующим «здравому смыслу» и объясняли это «естественно»: значения этих величин зависит от условий их измерения, что в общем случае означает выбор различных ИСО.

СТО увеличила число относительных величин. Вместе с тем, она ввела и ряд новых абсолютных величин: скорость света в вакууме, интервал (о нем будет идти речь в задаче №5) и т.д. С другой стороны, длина тела в той ИСО, где оно покоится, есть величина абсолютная, инвариантная. Эту длину тела называют собственной длиной. То же можно сказать о длительности процесса: его длительность в той ИСО, в которой он протекает в одной и той же точке пространства, есть абсолютная характеристика этого процесса.

Какова природа относительности длины и длительности? Для этого необходимо провести анализ процесса измерения длины. Если тело неподвижно в данной ИСО, то измерить длину тела не представляет труда: необходимо узнать, сколько раз в длине тела укладывается масштаб. Но если тело движется (да еще с большой скоростью), то предыдущий способ физически непригоден. Поэтому введем универсальный способ: чтобы измерить длину движущегося тела, необходимо *одновременно* засечь координаты его концов, разность этих величин и определит длину движущегося тела.

Но в задаче №2 мы выяснили, что в СТО «одновременность» - понятие относительное: то, что одновременно в одной ИСО, не одновременно в другой ИСО, движущейся относительно первой. И, следовательно, с точки зрения наблюдателя, находящегося в другой ИСО, измеренная в первой ИСО длина не является для него длиной тела, так как для этого наблюдателя измерение координат концов производилось в разные моменты времени.

Относительность хода времени (относительность временных промежутков) вытекает из относительности одновременности, которая, в свою очередь, является следствием 2-го постулата СТО. Как только мы откажемся от предельности скорости распространения электромагнитных волн, то тотчас же перейдем на позиции классической физики с ее принципом дальнодействия, с признанием существования сигнала, распространяющегося с бесконечной скоростью, тотчас же получим абсолютность длины и длительности.

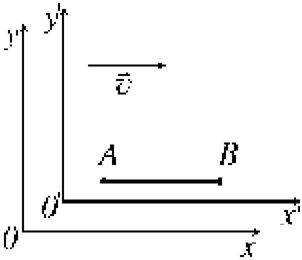
Все эти качественные рассуждения можно подтвердить математически. Для этого воспользуемся формулами преобразования координат и времени, которые выводятся на основе обоих постулатов СТО и носят название формул Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1) \qquad\qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1')$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2) \qquad\qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2')$$

В этих формулах нештрихованные величины измерены в ИСО «*L*», а штрихованные - в ИСО «*L'*».

Найти	l', $\Delta t'$
Дано	v l_0 Δt_0



Решение

Запишем условие задачи кратко, выберем две ИСО «*L*» и «*L'*», первую условно назовем неподвижной, другую - движущейся относительно первой со скоростью $\vec{v}$. Пусть в ИСО «*L*» вдоль оси Ох неподвижно располагается стержень *AB* (будем рассматривать одномерный случай); координаты его концов в этой ИСО x_1 и x_2. По определению длина стержня в этой ИСО равна $l_0 = x_2 - x_1$. Так как стержень в ИСО «*L*» неподвижен, то l_0 есть абсолютная, инвариантная характеристика стержня.

В ИСО «*L'*» координаты концов стержня нужно определять в один и тот же момент времени $t'_1 = t'_2$, измерения дадут x'_1 и x'_2, причем $x'_2 - x'_1 = l$ - длина стержня (по определению) в ИСО «*L'*».

Четверка чисел x_1, x_2, x'_1, x'_2 попарно связаны формулами Лоренца (1') (берутся обращенные формулы, чтобы затем воспользоваться условием $t'_1 = t'_2$).

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \tag{1'}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3}$$

Формула (3) по принципу соответствия приводит к абсолютности длины, как это и требуется по классическим представлениям, если $c \to \infty$,что предполагает существование бесконечно быстрого сигнала (обычно условие перехода от формул СТО к классическим выражениям записывается так: $\frac{v}{c} << 1$, что менее общее, чем условие $c \to \infty$):

$$l = l_0. \tag{4}$$

Представляет интерес рассмотреть случай, когда стержень расположен в ИСО *«L'»*. Проведя аналогичные рассуждения и используя формулы (1), снова получим формулу (3), но теперь под l_0 необходимо понимать собственную длину стержня в ИСО *«L'»*, а под l - относительную длину стержня в ИСО «*L*».

Действительно, измерение координат концов стержня, находясь в ИСО *«L»,* необходимо произвести в один и тот же момент времени $t_1 = t_2$.

Тогда $$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если ввести обозначения $x_2' - x_1' = l_0$, $x_2 - x_1 = l$, то формула, определяющая длину движущегося стержня, принимает вид (3):

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Но так и должно быть в силу равноправия ИСО *«L»* и *«L'»*. При решении данной задачи очень важно было правильно выбрать одну из формул (1) или (1'). При этом надо руководствоваться простым правилом: нужно использовать ту формулу, в правой части которой стоит время, отмеряемое по часам, мимо которых движется стержень.

Чтобы показать относительность промежутков времени, воспользуемся формулами (2) и (2'): для определения длительности события берем ту формулу, в правой части которой стоит координата события, не изменяющаяся в процессе наблюдения события. Пусть, например, горение свечи происходит в ИСО *«L»*, поэтому используем формулу (2). За время горения свечи по часам ИСО *«L»* $\Delta t_0 = t_2 - t_1$, координата свечи не изменилась $x_1 = x_2$. Тогда

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что в ИСО *«L'»*, относительно которой свеча перемещалась, время ее горения $\Delta t'$ больше, чем время горения Δt_0 в той ИСО, в которой свеча неподвижна. Если $c \longrightarrow \infty$, то формула (5) переходит в классическую:

$$\Delta t' = \Delta t_0 ,$$

утверждающая абсолютность хода времени, абсолютность одновременности. Если бы свеча располагалась в ИСО *«L'»*, то необходимо было бы воспользоваться формулой (2'), и мы снова получили формулу (5). Однако, теперь под Δt_0 нужно понимать собственную длительность горения свечи в ИСО *«L'»*. Подобие результатов следует из равноправия ИСО *«L»* и *«L'»*. Но ни в одной ИСО размеры стержня и длительность процесса никогда не будут равны нулю. В СТО, как и в классической физике, событие (процесс) - инвариант, т.е. оно (он) должно (должен) наблюдаться в любой ИСО. А вот его числовые характеристики (в том числе длина и длительность) зависят от выбора ИСО.

Обратим внимание на то, что, благодаря действию и в СТО закона причинности, перед так называемым «релятивистским корнем» $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ во всех формулах СТО берется только знак (+). Благодаря этому во всех ИСО время «течет» от прошлого к будущему, и причина будет предшествовать следствию.

В задаче №4 будет рассмотрен реальный эксперимент, подтверждающий полученные нами «парадоксальные» следствия СТО.

Задача №4. «Загадка», заданная элементарной частицей мю-мезоном

Немного истории. Мю-мезон, рождающийся в атмосфере, относится ко вторичным космическим частицам. Так называемые первичные космические частицы (лучи) приходят к нам из космоса (часть - от Солнца), они состоят из электронов, протонов, α - частиц и ядер других элементов таблицы Д. И. Менделеева. Обладая огромной энергией (до 10^{12} и более *ГэВ*, $1ГэВ=10^9эВ$), первичные космические лучи при столкновении с ядрами молекул атмосферы порождают вторичные космические лучи, в состав которых входят все известные элементарные частицы. Космические частицы были обнаружены по наблюдению ионизации, которую они производят в атмосфере (1901 г.). Исследование космических частиц привело к открытию антиэлектрона (позитрона) в 1932 г. (К. Андерсен), мю-мезона (1937г.), пи-мезона (1947 г.) и т. д. В этих исследованиях широко использовался так называемый метод камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле. Этот метод был разработан нашим соотечественником акад. Д. Скобельцыным. Не все еще известно в физике космических лучей. Но для нас в данной задаче интересен μ-мезон, частица, обладающая электрическим зарядом электрона (позитрона), масса его в 210 раз больше массы электрона. Но самое удивительное то, что физики не могут разгадать, для чего природа «придумала» μ–мезон, какова их роль во Вселенной...

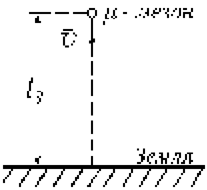
Суть данной задачи в следующем. В верхних слоях атмосферы рождается μ–мезон, движущийся со скоростью $v = 0,99\ c$, где c - скорость света в вакууме. До распада он успевает пролететь около *6 км*. Каково время жизни μ–мезона, наблюдаемое нами (ИСО «Земля»), и чему оно равно в ИСО, связанной с самим μ–мезоном (ИСО «Мезон»)? Чему равна толщина слоя атмосферы между местом рождения μ–мезона и Землей, измеренная в его «собственной» ИСО?

Решение

Найти	$\Delta t,\ \Delta\tau,\ \Delta l_\mu$
Дано	$v = 0{,}99c$ $l_з = 6км$

Запишем условие задачи кратко, которое «как всегда» дается в ИСО «Земля».

Сделаем схематический рисунок в ИСО «Земля».

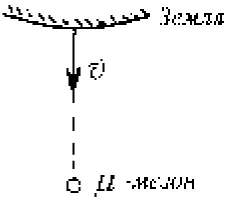


Зная скорость мю-мезона в ИСО «Земля» и расстояние, которое он пролетает до момента своего распада на другие частицы в этой ИСО, можем определить время, которое ему потребовалось в этой же ИСО:

$$\Delta t = \frac{l_з}{v} = \frac{6000м}{0{,}99\cdot 3\cdot 10^8 м\cdot c^{-1}} = \frac{2c}{0{,}99\cdot 10^5} = $$
$$= \frac{2}{99}\cdot 10^{-3}c \approx 2\cdot 10^{-5}c.$$

Это достаточно большое время для жизни частицы микромира. И за это время мю-мезон смог пролететь 6 км!

Для нахождения других искомых величин-собственного времени жизни-и толщины атмосферы l_μ, перейдем в ИСО «Мезон». В этой ИСО сам мезон неподвижен, а движется к нему («падает» на него) Земля. Поэтому схематически чертеж будет выглядеть как бы перевернутым по отношению к первому чертежу (сделанному в ИСО «Земля»).



Между временем жизни μ-мезона в ИСО «Земля» - лабораторным временем Δt и собственным временем жизни в ИСО «Мезон» имеется соотношение, которое получится из четвертой (временной) формулы Лоренца, если ее написать дважды, вычесть из одной другую и учесть, что рассматриваемое событие (длительность которого мы определяем) происходит в одной и той же точке пространства $x_1 = x_2$.

Тогда $\quad t'_2 - t'_1 = \dfrac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad$ или $\qquad \Delta t = \dfrac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$,

где $\quad \Delta t = t'_2 - t'_1$ - время жизни мю-мезона в ИСО «Земля»,

$\Delta\tau_0 = t_2 - t_1$ - время жизни мю-мезона в ИСО «Мезон».

Таким образом, искомое время жизни мю-мезона в собственной ИСО равно:

$$\Delta\tau_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2}{99}\cdot 10^{-3}\sqrt{1-\frac{0{,}99^2\cdot c^2}{c^2}}\cdot c = 2{,}8\cdot 10^{-6}\,c. \qquad (1)$$

В этой формуле v - это относительная скорость движения двух ИСО относительно друг друга, она дана в условии задачи.

Как видим, собственное время жизни мю-мезона на порядок меньше времени жизни его в ИСО «Земля». Но тогда возникает вопрос: как же за меньшее время жизни $\Delta\tau_0 << \Delta t$ мезон все же встретится с Землей в момент своего распада? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим еще раз процесс движения Земли в ИСО «Мезон». В этой системе отсчета движется не мезон, а Земля. И ей нужно преодолеть расстояние, разделяющее Землю от мезона. Но мы уже знаем, что в СТО и расстояния относительны. Для движущейся Земли в ИСО «Мезон» необходимо преодолеть расстояние не $l_з$, а l_μ, которые следующим образом связаны между собой:

$$l_\mu = l_з\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Сделаем вывод этой формулы. Пусть какой-либо стержень располагается в ИСО «Земля» неподвижно (под «стержнем» мы понимаем расстояние от Земли до места рождения мезона). Чтобы измерить длину этого «стержня» в ИСО «Мезон», необходимо одновременно засечь координаты его концов $t_1 = t_2$. Тогда, написав 1-ю формулу Лоренца дважды для координат начала и конца стержня и вычитая одну формулу из другой, получим:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{или} \qquad l_з = \frac{l_\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда $l_\mu = l_з\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$. (2)

Сопоставляя формулы (1) и (2) видим, что во сколько раз уменьшилось собственное время жизни мю-мезона по сравнению с его временем жизни в ИСО «Земля» (в $\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$), во столько же раз уменьшилось и то расстояние, которое необходимо преодолеть «падающей» на мезон Земле, чтобы встретиться с ним. Но за меньшее время вполне можно преодолеть меньшее расстояние.

В этой задаче мы закрепили и качественно и количественно относительность промежутков времени и длины, которые утверждает СТО. Реальность мю-мезона и объяснение его свойств на основе положений СТО является экспериментальным подтверждением этих положений. Ниже мы еще раз коснёмся относительности временных промежутков, рассматривая так называемый релятивистский эффект Доплера (см. задачу №11).

Еще раз обратим внимание читателя, что относительность длины и длительность носит кинематический характер, т.е. определяется исключительно изменением условий измерения этих величин, зависимостью численных результатов от состояния объекта. В самом же объекте никаких физических изменений не происходит. Это подтверждается инвариантностью собственной длины и длительности.

Задача №5. Закон причинности в СТО

Выясним, как проявляет свое действие закон причинности в СТО, сделаем это, решая следующую задачу. В некоторой ИСО происходят два события в точках, разделенных расстоянием в $1{,}5 \cdot 10^6$ *км*. Может ли второе событие быть следствием первого, если оно наступает: а) спустя *1с* после первого события; б) спустя *5с*; в) спустя *10с*? Существует ли ИСО, в которой данные события произойдут одновременно? в одном месте?

В СТО, как и в другой физической теории, помимо относительных величин, численное значение которых зависит от выбора ИСО, имеется определенное количество абсолютных характеристик. Наличие абсолютных величин удостоверяет то, что в данной теории есть элементы абсолютной истины. В этом, в первую очередь, непереходящее значение инвариантов в каждой физической теории.

По сравнению с классической физикой, СТО изменила соотношение числа и вида абсолютных и относительных величин. Так, длина из ранга абсолютных величин перешла в ранг относительных. Однако, длина тела в покое есть его абсолютная характеристика, т.е. пока тело существует, оно обладает определенной протяженностью, и в покое эта величина - инвариант. То же можно сказать и о длительности процесса: длительность его зависит от выбора ИСО. Но собственная длительность (длительность в той ИСО, в которой процесс происходит в одном месте) - инвариант. Абсолютной величиной является и скорость света в вакууме. Поэтому неверно утверждение, что будто бы СТО «все сделала относительным». Наоборот, СТО обнаружила более глубокие свойства окружающего нас мира, его объективность, познаваемость.

Среди новых, отсутствовавших в классической физике величин, имеющих абсолютный характер, СТО вводит так называемый ИНТЕРВАЛ. Особенностью этой величины является то, что она связывает пространственные и временные характеристики двух событий.

Интервал вводится следующим образом, его квадрат определяется так:

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1), \qquad (1)$$

где индексы 1,2 относятся соответственно к первому и второму событиям.

Первые три слагаемые определяют квадрат пространственного расстояния между двумя событиями, четвертое связано с промежутком времени наступления этих событий. А после умножения на скорость света в вакууме это последнее слагаемое в (1) определяет расстояние, проходимое светом за время чередования рассматриваемых событий. Хотя длина и промежутки времени в СТО - относительные величины, их комбинация в форме интервала является абсолютной, инвариантной величиной. В этом можно убедиться, если воспользоваться формулами преобразования координат и времени Лоренца. Предоставляем это сделать читателям и получить следующее выражение:

$$S^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1) = S'^2$$

Абсолютность квадрата интервала имеет еще и то значение, что указывает нам на необходимость при рассмотрении любого события задавать не только его положение в пространстве (x,y,z), но и момент времени t, когда это событие происходит. Совокупность четырех чисел (x,y,z,t) определяет точку в «четырехмерном пространстве», она называется мировой точкой события, а совокупность последовательных положений мировой точки определяет четырехмерную «мировую» траекторию события.

Введенный выше интервал позволяет нам решить поставленную задачу, в этом еще одно важное физико-философское содержание этой величины. Но предварительно упростим выражение (1). Поместим первое событие в начало координат и начнем отсчет времени с момента появления этого события. Тогда $x_1=y_1=z_1=0$ и $t_1=0$. Опустим индекс 2, тогда формула (1) запишется так:

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \qquad (2)$$

Но при этом содержание интервала остается прежним: он связывает пространственно - временные характеристики ДВУХ событий, одно из которых находится в начале координат. Далее введем следующие обозначения, благодаря которым интервал запишется еще компактнее:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{и} \quad t = T,$$

и формула (2) принимает вид:

$$S^2 = R^2 - c^2T^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим два события, для которых справедливо условие

$$S^2 = \left(R^2 - c^2T^2\right) > 0 \quad \text{или} \quad R > cT. \qquad (4)$$

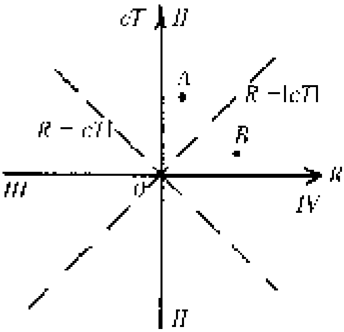
Равенство (4) утверждает, что между рассматриваемыми событиями такое расстояние R, что даже световой сигнал (самый быстрый!) не успеет за время чередования событий T преодолеть это расстояние. Но это означает, что между данными двумя событиями не может быть причинно-следственной связи. И это справедливо при рассматривании данных событий в любой ИСО, так как интервал абсолютен, инвариантен: если квадрат его в одной ИСО больше нуля, то и в любой другой ИСО $S^2 > 0$. Такой интервал получил название пространственно-подобного интервала. В этом названии подчеркивается одно из свойств данной пары событий: их расположение в пространстве абсолютно. Если в одной ИСО второе событие располагается слева от первого, то и в любой другой ИСО такое расположение событий в пространстве сохраняется (но не надо забывать, что пространственное расстояние между событиями R - величина относительная, абсолютен только интервал $\left(R^2 - c^2T^2\right)$ = инвариант!).

Рассмотрим теперь такую пару событий, для которых выполняется условие $R < cT$. Из него следует, что световой сигнал может преодолеть расстояние между событиями за время их чередования. Но тогда между данной парой событий может (хотя и не обязательно) существовать причинно-следственная связь. Для такого интервала справедливо неравенство

$$S^2 = \left(R^2 - c^2T^2\right) < 0, \qquad (5)$$

оно выполняется в любой ИСО в силу абсолютности интервала. Интервал, удовлетворяющий условие (5), называется временно-подобным, в этом названии подчеркивается существенное для данной пары событий: их абсолютная временная последовательность.

Из предыдущего следует, что с помощью понятия интервала все события в мире по отношению к данному событию можно разделить на два непереходящих друг в друга класса событий. Подобного критерия не могло быть в классической физике, так как в ней предполагается существование бесконечно быстрого сигнала, который мгновенно распространяется на любое расстояние. Так что по классическим представлениям между всеми событиями в мире может существовать всеобщая причинно-следственная связь, так называемый классический абсолютный детерминизм.



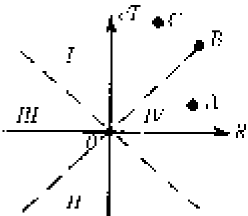
Наши логические рассуждения можно представить графически с помощью так называемого «светового конуса», образующие которого удовлетворяют условию $|R| = |cT|$, который соответствует так называемому светоподобному интервалу, описывающему распространение светогого сигнала. Так как R и cT - однородные величины (расстояния), то на пространственно-временной диаграме с осями R и cT, условие $|R| = |cT|$ определяет биссектрисы координатных углов. Одно из рассматриваемых событий помещается в начале координат. Тогда для событий (А) выполняется условие $R < cT$, т.е. в квадранте (1) располагаются события, которые по отношению к событию, находящемуся в начале координат, могут быть следствиями, а в квадранте II мировые точки соответствуют событиям, которые произошли раньше события в т. 0. Причем, это чередование во времени, в силу инвариантности интервала, носит абсолютный характер. Для событий, мировые точки которых располагаются в квадрантах III и IV, выполняется условие $R>cT$. Они по отношению к событию в т. 0 имеют абсолютное пространственное расположение, но никогда и нигде не могут иметь с ним причинно-следственную связь.

После теоретического анализа, проведенного выше, не представляет труда решить предлагаемую задачу количественно. Запишем условие задачи кратко в ИСО «1-е событие», совмещая это событие с началом координат.

Найти	cT
Дано	$R = 1{,}5 \cdot 10^9$ м $T_A = 1с$ $T_B = 5с$ $T_C = 10с$

Решение

Строим пространственно-временную диаграмму «светового конуса» в ИСО «1-е событие».



Определяем $cT_A = 3 \cdot 10^8 м/с \cdot 1с = 3 \cdot 10^8 м$

Следовательно, для событий (А) и (О) выполняется условие $R>cT_A$, а это означает, что событие (А) не может быть следствием события (О), данные события являются пространственно-подобными.

Для событий (В) и(О) имеем:

$$cT_B = 3 \cdot 10^8 м/с \cdot 5с = 15 \cdot 10^8 м = 1{,}5 \cdot 10^9 м.$$

Для рассматриваемых событий выполняется условие $R=cT$, которое соответствует светоподобному интервалу и описывает распространение светового сигнала.

В случае, когда $T_C=10с$, получаем, что

$$cT_C = 3 \cdot 10^8 м/с \cdot 10с = 3 \cdot 10^9 м,$$

и поэтому выполняется условие для временно-подобного интервала $R<cT_C$. Между событиями (С) и (О) может быть причинно-следственная связь.

Задача №6. Эффект Комптона

Одним из положений электродинамической картины мира, построение которой завершилось к началу XX в., (после возникновения специальной теории относительности), было утверждение, что материя существует в двух видах: в виде вещества и в виде электромагнитного поля. Вещественные тела состоят из непроницаемых, локализованных в пространстве частиц (атомов, молекул, ионов, электронов). Полевое состояние материи (материальность электромагнитного поля утвердила в 1905 г. специальная теория относительности) обладает характерным для этого вида материи свойством суперпозиции, т.е. в одном и том же геометрическим объеме может находиться множество полей, переменные во времени поля распространяются от места своего возникновения в виде волн. В электродинамической картине мира считалось, что свойства этих двух видов материи несводимы друг к другу, слишком контрастны эти свойства (впоследствии, после возникновения квантовой механики, была построена новая квантово-полевая картина мира, в которой было установлено единство вещественного и полевого видов материи).

Первое серьезное затруднение в электродинамической картине мира возникло в 1887 г., когда немецкий физик Г. Герц обнаружил новое физическое явление: под воздействием света отрицательно заряженная металлическая пластинка разряжалась, теряла заряд. После открытия электрона Томсоном Дж. в 1897 г. было установлено, что отрицательно заряженная металлическая пластинка под действием света теряет электроны. Российским физиком А. Г. Столетовым были установлены законы фотоэффекта (так было названо явление, открытое Г. Герцем). Однако объяснить эти законы с позиций классической физики не удавалось, свет при этом рассматривался как волновой процесс.

В 1905 г. А. Эйнштейн подошел к проблеме фотоэффекта принципиально по-новому. Развивая идею М. Планка о том, что атомы излучают и поглощают энергию порциями, А. Эйнштейн предположил, что электромагнитное излучение и распространяется в пространстве порциями, квантами. Впоследствии этим дискретным порциям электромагнитного поля дали название «фотоны». Приписав порциям электромагнитного излучения свойства частиц-корпускул, А. Эйнштейн составил уравнение, объяснявшее все особенности фотоэффекта. Это уравнение, выражавшее закон сохранения и превращения энергии, для фотоэффекта из металла записывается так:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

где слева стоит энергия фотона, которая расходуется на отрыв электрона из металлического образца (A - «работа выхода») и на сообщение ему (если $A < h\nu$) кинетической энергии. За более подробным разбором законов фотоэффекта отсылаем читателя к специальной литературе (например, к учебному пособию «Физика - 11»). А сейчас же обратим внимание на ту сторону явления, которое нас интересует по условию задачи и связано со специальной теорией относительности: электромагнитное излучение обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами. В истории физики это было первое явление, в котором проявлялся так называемый корпускулярно-волновой дуализм элементарных частиц, положенный затем в основу квантовой механики.

Оказалось, что в природе существуют и другие явления, в которых проявляются корпускулярные свойства излучения. Так, в 1923 г. американский физик А. Х. Комптон наблюдал рассеяние электромагнитного излучения на неподвижных электронах. Как и в случае с фотоэффектом, явление Комптона можно было объяснить, если считать, что излучение обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами. Причем для количественного объяснения этого явления нужно опираться на выводы СТО.

Рассмотрим теорию этого явления (эффект Комптона) в форме задачи. При рассеянии электромагнитного излучения на неподвижном электроне, происходит как изменение энергии рассеянного излучения, так и изменение направления его распространения. Исходя из корпускулярных свойств фотона, рассчитать изменение длины волны излучения, а также найти энергию, приобретаемую электроном.

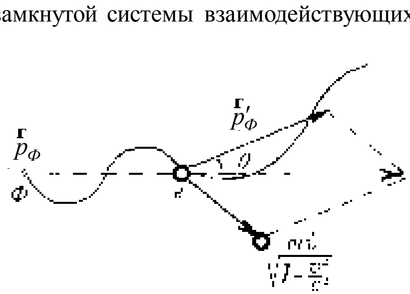
Решение

Найти	$\Delta\lambda,\ E_{кин}$
Дано	λ m $p_Ф = \dfrac{h\nu}{c}$ $E_Ф = h\nu$

Выберем систему отсчета «Лаборатория». Заметим, что мы не должны связывать ИСО с электроном, хотя по условию задачи он до взаимодействия с фотоном находится в покое. Дело в том, что в результате взаимодействия электрон должен приобрести скорость, но в ИСО «Электрон» он и затем должен оставаться неподвижным, что было бы невозможно без введения дополнительных сил связи. Но тогда получалось бы совсем другая задача.

Изобразим процесс рассеяния фотона графически.

Рассматривая и электрон и фотон как корпускулы, составим для этой замкнутой системы взаимодействующих тел формулы законов сохранения и превращения энергии и импульса:



$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$\frac{\vec{p}_{ф}}{c} = \frac{\vec{p}\,'_{ф}}{c} + \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

В формуле (1) первый член слева - энергия фотона, второй - энергия покоя неподвижного электрона в ИСО «Лаборатория»; справа первый член - новая энергия рассеянного фотона, второй - полная энергия рассеянного электрона, включающая как энергию покоя mc^2, так и кинетическую энергию его движения $E_{кин}$. В формуле (2) слева учитывается, что в исходном состоянии импульс электрона равен нулю, справа в формуле (2) стоят импульс рассеянного фотона и релятивистский импульс электрона, который он приобретет в результате взаимодействия. Только использование формул СТО позволяет полностью объяснить все особенности эффекта Комптона. Формула (2) записана в векторной форме. Преобразуем это выражение, используя теорему косинусов из элементарной геометрии:

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2(\nu')^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu\nu'}{c^2}\cos\Theta. \qquad (3)$$

Формулу (1) запишем так:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = h\nu - h\nu' + mc^2.$$

Возведем ее в квадрат:

$$\frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = h^2\nu^2 - h^2(\nu')^2 + m^2c^4 + 2h\nu mc^2 - 2h\nu' mc^2 - 2h^2\nu\nu'.$$

Из этого выражения вычтем почленно формулу (3), умножив предварительно все ее члены на c^2. Получаем:

$$m^2c^4 = m^2c^4 + 2hmc^2(\nu-\nu') - 2h^2\nu\nu'(1-\cos\Theta).$$

После упрощения оставшегося равенства, придаем выражению следующий вид:

$$(\nu-\nu')mc^2 = h\nu\nu'(1-\cos\Theta). \qquad (4)$$

Учитывая, что $\frac{c}{\nu} = \lambda$ и $\frac{c}{\nu'} = \lambda'$, запишем (4) так:

$$(\lambda'-\lambda)mc = 2h\sin^2\frac{\Theta}{2},$$

где использована формула

$$\left(1-\cos\Theta\right)=2\sin^2\frac{\Theta}{2}.$$

Таким образом, изменение длины волны излучения равно:

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\Theta}{2}.$$

Кинетическая энергия электрона также рассчитывается на основании формул специальной теории относительности:

$$E_{кин}=E_{полн}-E_{поюя}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-mc^2=h\left(v-v'\right),$$

где использована формула (1).

Выразим из равенства (4) частоту рассеянного фотона

$$v'=\frac{mc^2}{mc^2+2hv\sin^2\frac{\Theta}{2}}v$$

и, подставив ее в выражение для $E_{кин}$, получаем функциональную зависимость $E_{кин}$ от частоты падающего фотона:

$$E_{кин}=\frac{2(hv)^2\sin^2\frac{\Theta}{2}}{mc^2+2hv\sin^2\frac{\Theta}{2}}. \qquad (5)$$

Экспериментально явление Комптона можно наблюдать с помощью камеры Вильсона. На пути электронов и на пути рассеянных фотонов появляются ионы (и электроны и фотоны ионизируют молекулы газа, заполняющего камеру Вильсона), на них как на центрах конденсируется пересыщенный пар, что делает видимым путь электронов и фотонов. Из прилагаемой таблицы видно, как хорошо экспериментальные данные согласуются с теорией, свидетельствуя об ее истинности.

Θ^0	$\Delta\lambda_{теор}$	$\Delta\lambda_{эксп}$
72	0,0168	0,0170
90	0,0243	0,0241
110	0,0345	0,0350
160	0,0469	0,0470
170	0,0480	0,0482

Задача №7. Масса в СТО

Долгое время в литературе по СТО использовалось понятие «релятивистская масса». Утверждалось, что масса движущейся частицы зависит от ее скорости, «релятивистской массе» приписывался физический смысл.

Однако, проведенный в последние годы анализ этого понятия показал, что «релятивистская масса» не имеет физического содержания. Интересно, что сам создатель СТО А. Эйнштейн эту массу не использовал. Как же так случилось в «солидной» науке, какой является физика, что в ней использовали мифическое понятие «релятивистская масса»? Этому заблуждению есть ряд объяснений. Кстати, это ведь не первый случай использования физикой мифических понятий, вспомним, хотя бы о теплороде, или эфире...

«Расследование», проведенное рядом ученых, показало, что первоначально «релятивистская масса» была введена в СТО из методических соображений придать некоторым формулам этой теории такой вид, какой они имеют в классической физике. Затем эта «цель» была забыта и введенному обозначению стали придавать физическое содержание. Этому способствовало также соответствующее толкование некоторых экспериментальных фактов, установленных в начале XX в. К этим опытам в первую очередь относятся опыты немецкого ученого В. Кауфмана, изучавшего движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

Чтобы показать нефизичность «релятивистской массы», проведем и мы небольшое расследование, покажем, что «релятивистская масса» внутренне противоречива, а поэтому не может иметь физического содержания. Рассмотрим два мысленных опыта. Пусть частица массы m движется со скоростью u в некоторой ИСО «L». В этой ИСО, согласно определению релятивистской массы, эта величина будет иметь значение

$$m_{рел} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

где m считается массой частицы в покое при $u=0$.

В этом опыте нет надобности искать причину изменения массы частицы при ее движении в ИСО «L», так как для СТО характерен перевод ряда величин, которые в классической физике считались абсолютными, в ранг относительных. При этом относительность выступает как число кинематический эффект, связанный с произвольным выбором одной из равноправных ИСО, никаких физических изменений в объектах при этом не происходит.

Рассмотрим теперь другой опыт. Пусть та же частица в той же ИСО «L» разгоняется из состояния покоя до скорости u. Очевидно, что для этого необходимо совершить работу, затратить энергию. Возрастание массы в этом опыте - эффект, имеющий динамическую природу. Это уже не та относительность, которая лежит в основе СТО.

Установленная нами противоречивость толкования содержания $m_{рел}$ указывает на нефизичность этого понятия.

Независимость массы от скорости движения тела однозначно устанавливается в СТО при изложении ее в четырехмерной трактовке (в псевдо-эвклидовом пространстве Минковского, в котором вводятся следующие четыре координаты для описания любого события: $x_1=x;\ x_2=y;\ x_3=z;\ x_4=ict$). Тотчас же выясняется, что релятивистский корень $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ появляется *впервые* при составлении компонент (проекций) релятивистской скорости:

$$V_i=\frac{u_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad u_i=\frac{dx_i}{dt},\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

а умножая эти компоненты на массу m, которую в СТО рассматривают как абсолютную величину, получают компоненты импульса в СТО:

$$p_i=mV_i=\frac{mu_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma m u_i,\ \text{где}\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Именно с величиной γ связано понятие «релятивистская масса»: компоненты релятивистского импульса принимают «классический вид», если вместо произведения γm ввести $m_{рел}$. Но, как было показано выше, релятивистский корень никакого отношения не имеет к массе, а определяет сложную зависимость релятивистского импульса от скорости частицы. В опытах Кауфмана и других, для объяснения которых использовали «релятивистскую массу», на самом деле проявлял себя релятивистский импульс, входя в выражения законов сохранения и превращения энергии и сохранения импульса (см. предыдущую задачу «Эффект Комптона»).

В СТО, как и в классической механике, используется та же характеристика, которая определяет инерционные и гравитационные свойства вещественных тел. Вместе с тем, СТО вскрыла еще одно содержание этого сложного физического понятия «масса». А. Эйнштейном получено важное, фундаментальное соотношение:

$$E_0=mc^2 \tag{1}$$

Эта формула Эйнштейна устанавливает, что любое вещественное тело благодаря только факту своего существования обладает не только массой m, но и пропорциональной ей энергией покоя E_0. Эксперимент (ядерная энергетика, физика элементарных частиц) подтверждает правильность формулы Эйнштейна. Если тело движется в данной ИСО, то его полная энергия определяется по формуле:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (2)$$

Эта энергия содержит не только энергию покоя E_0, но и кинетическую энергию тела, которую можно рассчитать так:

$$E_{кин} = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (3)$$

Однако, помимо вещественных тел, в природе существуют безмассовые частицы - фотоны, гравитоны (последние предсказываются теорией гравитационного поля, но экспериментально еще не обнаружены). С учетом их существования Эйнштейном получена более общая формула взаимосвязи энергии, массы и импульса частиц, из которой формула (1) получается как частный случай. Эта формула такова:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \qquad (4)$$

где p - импульс частицы.

Для фотона, который является безмассовой частицей (а, следовательно, он безынерционен, не испытывает ни ускорения, ни замедления, и всегда движется в однородной среде с постоянной скоростью, предельной в вакууме) формула (4) принимает вид:

$$E=pc \qquad (5)$$

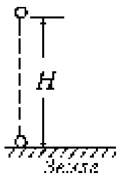
В литературе, особенно в научно-популярных статьях, можно встретить неправильное название и толкование формул (1) - (4). Их называют формулами эквивалентности массы и энергии. Но слово «эквивалентность» имеет совершенно другое содержание, чем то, что утверждают формулы Эйнштейна: ни о какой эквивалентности одной характеристики другой формулы Эйнштейна не говорят, они устанавливают фундаментальную связь между этими физическими характеристиками, определяющими разные, но, как оказалось, взаимосвязанные свойства.

После отвержения «релятивистской массы» возникает проблема, как быть со множеством задач, в которых фигурирует эта «величина». Нужно поступить следующим образом: нужно переформулировать текст этих задач, заменив «релятивистскую массу» на релятивистский импульс, и рассчитывать значение или изменение этой величины.

Мы коснулись только одной стороны понятия «масса в СТО», у нее есть и другие интересные проблемы. Например, в СТО отсутствует закон сохранения массы, мы не касаемся сейчас такого понятия, как «дефект массы» (см. задачи в разделе «Квантовая физика»), нетривиально применение формулы (4) для потока фотонов и т.д. Интересующихся этими вопросами отсылаем к дополнительной литературе (В. А. Угаров. Спецальная теория относительности. - М.: Наука, 1977 г.; Г. А. Розман. Специальная теория относительности: Учебное пособие. - Псков: ИУУ, 1995.).

Закрепим содержание формулы Эйнштейна (1), решив следующую задачу: Какой массой обладают дрова, поднятые с поверхности Земли на второй этаж? Какая энергия выделяется при сгорании этих дров?

Найти	$m_2,\ \Delta Q$
Дано	m_1 H



Решение

Выберем ИСО «Земля» и сделаем в ней схематический рисунок, соответствующий условию задачи.

При осмыслении задачи сразу же возникает вопрос, почему дрова должны обладать другой массой после поднятия их на высоту второго этажа, ведь и на Земле и на втором этаже дрова неподвижны.

Ответ получается сразу же, как только мы правильно «прочтем» формулу (1): если тело обладает энергией E_0, то оно имеет массу, величина которой равна $m = \frac{E_0}{c^2}$; можно утверждать и обратное: если тело имеет массу m, то оно обладает энергией покоя E_0. Поднимая дрова на второй этаж, мы совершаем работу mgh. Поэтому поднятые дрова будут обладать большей энергией, а, следовательно, и большей массой.

Таким образом, на высоте второго этажа дрова будут иметь массу

$$m_2 = \frac{E_0 + mgh}{c^2},$$

где E_0 - энергия покоя дров на уровне Земли.

Чтобы ответить на второй вопрос, надо вспомнить, что процесс горения - это экзотермическая химическая реакция, в которой участвуют электроны атомных оболочек, она составляет ничтожную часть от энергии покоя E_0, величина которой обусловлена массой ядер, массой тех частиц, из которых состоят ядра. А масса простейшего ядра - ядра атома водорода почти в 2000 раз больше массы электрона. Та энергия, о которой говорит формула Эйнштейна, не выделяется при сгорании дров, а остается принадлежащей «остаткам» сгоревших дров - золе, частично «улетит» с раскаленными кусочками дров, подхваченными воздушными потоками в дымовой трубе. Энергия, о которой нам сообщает формула Эйнштейна, высвобождается при взаимопревращениях элементарных частиц, при ядерных реакциях распада или синтеза. В последних случаях эту энергию называют ядерной. Именно эта энергия высвобождается в регулируемых реакциях распада урана и других тяжелых ядер на атомных электростанциях, которые правильнее называть ядерными электростанциями.

Задача №8. Релятивистское уравнение движения

Как и в классической динамике, в динамике СТО решаются две задачи:

1) прямая задача динамики - если путем независимых опытов определена сила, действующая на материальную точку, то из уравнения движения можно найти ускорение, скорость, а затем и координату положения материальной точки в любой момент времени. Для решения этой задачи используется теория решения дифференциальных уравнений. Ниже мы составим и будем решать простейшее дифференциальное уравнение;

2) обратная задача динамики-по известным массе и ускорению материальной точки вычисляется действующая на нее сила. Именно эту задачу решал И. Ньютон, устанавливая закон всемирного тяготения, используя при этом наблюдения астрономов Тихо Браге и И. Кеплера.

Будем решать прямую задачу динамики СТО.

Найти	$u(t)$
Дано	$F = F(m, \vec{u}, t)$

Решение

Выберем ИСО «Лаборатория».

В классической механике имеется несколько форм записи уравнения движения. Две из них известны читателю из школьного курса физики:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (1) \qquad \text{и} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad (2)$$

где $\vec{p} = m\vec{u}$ - классический импульс материальной точки, m и u - ее масса и скорость.

Интересно отметить, что создатель классической механики И. Ньютон записал уравнение движения в форме (2), считая ее более общей. И действительно, даже в рамках классической механики формулы (1) и (2) не всегда эквивалентны. Например, для расчета движения космической ракеты необходимо решать уравнение (2), так как в уравнении (1) предполагается, что масса движущейся материальной точки остается постоянной в процессе всего движения. В случае же движения ракеты из-за сгорания топлива масса движущейся ракеты уменьшается (соответствующее уравнение движения ракеты получило название по имени ученого, первым его решившим - уравнение И. В. Мещерского).

В СТО, как и в классической механике, масса материальной точки является инвариантной, абсолютной величиной, но импульс оказывается сложной функцией скорости движения материальной точки; а именно:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \qquad (3)$$

Составим релятивистское уравнение движения, используя выражения (2) и (3):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\,. \tag{4}$$

Как известно, СТО удовлетворяет одному из основных принципов современной физики - принципу соответствия: всякая более общая физическая теория (каковой является СТО по отношению к классической механике) содержит в себе как предельный случай предшествующую теорию. Согласно этому принципу формулы СТО переходят в соответствующие формулы классической механики при выполнения условия $\frac{u}{c} \ll 1$. Это условие указывает границы применимости классической механики. Однако нужно иметь в виду, что СТО справедлива при любых скоростях от 0 до *c*. Например, СТО утверждает, что и покоящееся тело обладает энергией покоя $E_0=mc^2$, в то время как в классической физике такого утверждения не было. Читатель может убедиться, что при выполнения критерия $\frac{u}{c} \ll 1$, формула (4) тотчас же переходит в формулу (2), причем под импульсом понимается обычное «классическое» выражение $\vec{p} = m\vec{u}$.

Произведем с уравнением (4) некоторые преобразования. Раскроем производную по времени в левой части (4) как производную от произведения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\,\frac{d}{dt}\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,. \tag{5}$$

Умножим и разделим второе слагаемое на постоянную величину c^2:

$$\frac{\vec{u}}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,. \tag{6}$$

Под знаком производной в (6) согласно формуле Эйнштейна стоит полная энергия тела *E*, а производная от нее по времени определяет мощность той силы *F*, которая совершает работу по перемещению тела. Представим эту мощность так:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}A=\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\cdot\vec{S}\right)=\left(\vec{F}\cdot\frac{d\vec{S}}{dt}\right)=\left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right), \tag{7}$$

где предполагается, что работа совершается за счет изменения энергии постоянной силой $\vec{F}$, символ $\left(\vec{F}\cdot\vec{S}\right)$ означает скалярное произведение двух векторов $\vec{F}$ и $\vec{S}$.

Таким образом, уравнение (5) с учетом (4), после переноса преобразованного второго члена справа налево, принимает вид:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{F}-\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right). \tag{8}$$

Это уравнение является общей формой записи релятивистского уравнения движения, в СТО оно играет ту же роль, что и формула 2-го закона Ньютона.

Обратим внимание на существенно новое, что содержится в уравнение (8) по сравнению с классическим уравнением 2-го закона Ньютона (1) или (2). По своему смыслу производная $\frac{d\vec{u}}{dt}$ является ускорением. Но тогда из уравнения (8) следует, что ускорение в релятивистском движении не всегда совпадает по направлению с вектором силы (в классической механике эти два вектора обязательно сопараллельны $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$), зависит также от направления скорости: справа в формуле (8) стоит векторная сумма 2-х векторов $\vec{F}$ и $\alpha\vec{u}$, где $\alpha=\frac{1}{c^2}\cdot\left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right)$ и направление этой суммы может не совпадать с направлением вектора $\vec{F}$.

Рассмотрим два простейших случая расположения векторов $\vec{F}$ и $\vec{u}$ относительно друг друга (с этими случаями мы встречаемся как в механике, так и в электродинамике при рассмотрении движения тел, в том числе заряженных частиц в электрических и магнитных полях).

Случай 1. Пусть вектор силы $\vec{F}$ направлен перпендикулярно вектору скорости $\vec{u}$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно нулю и уравнение движения принимает вид:

$$m_{\perp}\vec{a}_{кп}=\vec{F}, \tag{9}$$

где $$m_{\perp}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Эту величину ($m_\perp$) иногда называют «поперечной массой», что символизирует взаимное расположение векторов $\vec{F}$ и $\vec{u}$. Никакого физического смысла это название не содержит. Уравнение (9) внешне совпадает с уравнением (1), именно для этого и вводится величина $m_\perp$. Далее это уравнение решается как и в классической механике. Случай 1 на практике встречается при рассмотрении движения заряженных частиц по круговой орбите (например, в ускорителях элементарных частиц типа циклотрона).

Случай 2. Пусть векторы $\vec{F}$ и $\vec{u}$ располагаются параллельно друг другу. Тогда второй член справа в уравнении (8) можно преобразовать так:

$$\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right)=\frac{\vec{u}}{c^2}F\cdot u\cdot\cos 0=\frac{u}{c^2}\vec{F}\cdot u=\frac{u^2}{c^2}\vec{F}. \tag{10}$$

Знак вектора перенесен с величины *u* на *F*, что возможно в силу параллельности этих векторов, а модуль всего члена от этого не изменяется.

Уравнение движения (8) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}a_{кп}=\vec{F}-\vec{F}\frac{u^2}{c^2}=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\vec{F},$$

или

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}a_{кп}=\vec{F}. \tag{11}$$

Если ввести обозначение $m\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=m_{\uparrow\uparrow}$, то внешне уравнение движения снова принимает классическую форму:

$$m_{\uparrow\uparrow}\vec{a}_{кп}=\vec{F}. \tag{12}$$

Величину $m_{\uparrow\uparrow}$ в литературе по СТО называют «продольной массой». Но как и поперечная масса, продольная масса не должна восприниматься как физическая величина. Повторимся: в СТО физический смысл имеет только одна масса *m*, которая инвариантна, т.е. не зависит от выбора ИСО.

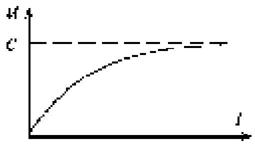
Определим закон изменения скорости тела для этого случая. Запишем уравнение движения так (знак вектора опустим в силу одномерности движения, координатную ось направим параллельно векторам $\vec{u}$ и $\vec{F}$):

$$\frac{m}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{du}{dt}=F \quad \text{или} \quad \frac{du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=a_0dt, \tag{13}$$

где введено обозначение $a_0 = \frac{F}{m}$.

Интегрирование в пределах от 0 до t приводит к следующему результату:

$$\frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = a_0 t, \quad \text{откуда} \qquad u = \frac{a_0 t}{\left(1-\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (14)$$



На рисунке представлен качественный график функции $u = u(t)$. Можно убедиться, что при $t \to \infty$ скорость тела будет стремиться к предельному значению, равному скорости света в вакууме, как и должно быть в СТО. Этот случай решения релятивистского уравнения определяет движение заряженных частиц в продольном электрическом поле, например, при движении заряженной частицы в пространстве между дуантами в циклическом ускорителе.

Задача №9. СТО и ядерная физика

Когда говорят, что выводы СТО подтверждены экспериментально, то имеют в виду явления и процессы, происходящие с элементарными частицами. Понятие «элементарная частица» - это историческое понятие: с развитием физики в это понятие вкладывалось новое содержание. Так, в древнем мире под элементарной частицей понималось наименьшее количество вещества, оно называлось «атомом», что в переводе с греческого означает «неделимый».

В XVIII-XIX вв. под элементарной частицей понималось то, что ныне мы называем молекулой. В конце X1X в. была открыта первая истинно элементарная частица - электрон. До сих пор неизвестна природа электрона, но общепризнано, что он далее неделим. Другие позже открытые элементарные частицы (протон, нейтрон и др.) оказались сложными образованиями и при определенных условиях они распадаются на более простые. Вот, например, реакция распада отрицательно заряженного мю-мезона (существует и положительно заряженный мю-мезон):

$$\mu_{-1} = e_{-1} + v_0 + \tilde{v}_0,$$

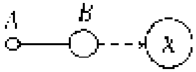
где e_{-1} - электрон, v_0 и $\tilde{v}_0$ - нейтрино и антинейтрино.

В этой реакции выполняются законы сохранения энергии, количества движения, электрического заряда, числа лептонов (легких частиц), числа частиц и античастиц и т.д.

До сих пор не построена теория элементарных частиц. Но для описания физических процессов, происходящих с этими частицами, широко используется положения СТО. Именно это и служит экспериментальным доказательством истинности СТО.

Применим некоторые положения СТО для рассмотрения следующей задачи. В лабораторной ИСО частица A (имеющая массу m_A и импульс $\vec{p}$) сталкивается с покоящейся частицей B. Может ли частица B поглотить частицу A?

Найти	$(A+B)\rightarrow X$
Дано	m_A
	$\vec{p}$
	$p_B = 0$
	m_B



Решение

ИСО задана в условии задачи - «Лаборатория». Хотя частица B неподвижна в этой ИСО в начальный момент, но с ней нельзя связывать начало СО, так как после столкновения с частицей A частица B должна прийти в движение. A тело отсчета (начало координат) должно быть неподвижно в выбранной ИСО.

Чертеж в данной задаче имеет символический смысл.

Для решения задачи воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. До столкновения энергия системы слагалась из энергии налетающей частицы A:

$$E_A = \sqrt{m_A^2 \cdot c^4 + p^2c^2}$$

и энергии покоящейся частицы B:

$$E_B = m_Bc^2.$$

Суммарная энергия частиц A и B до столкновения равна:

$$E = E_A + E_B = \sqrt{m_A^2c^4 + p^2c^2} + m_Bc^2.$$

После столкновения, в результате чего частица A (по условию задачи) поглощена частицей B, полная энергия ее будет:

$$E = \sqrt{m_B^2c^4 + p^2c^2}.$$

Эта формула учитывает, что масса частицы B (как и всех других элементарных частиц) является абсолютной, инвариантной величиной (см. задачу №7). Кроме того, на основании закона сохранения импульса, у частицы B, которая по предположению должна поглотить частицу A, будет тот же импульс, какой был у частицы A до столкновения (частица B до столкновения была неподвижна, ее импульс $p_B = 0$).

Замкнутость системы позволяет составить равенство:

$$m_Bc^2 + \sqrt{m_A^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{m_B^2c^4 + p^2c^2}.$$

Возведем обе стороны равенства в квадрат и перенесем все члены в одну сторону его, получаем:

$$2m_B c^2\sqrt{m_A^2c^4 + p^2c^2} + m_A^2c^4 = 0.$$

Это равенство для реальных частиц не может выполняться, так как все его члены - положительные величины. Таким образом, сделанное в условии задачи предположение, что при столкновении с движущейся частицей A ранее неподвижная частица B поглотит частицу A и останется прежней частицей B, невозможно. Совсем другое дело, если в результате столкновения будут рождаться и другие элементарные частицы. Например, фотон, налетая на свободный электрон, как в эффекте Комптона, не может быть поглощен электроном. В результате столкновения фотона с неподвижным электроном возникнет фотон рассеяния и электрон отдачи (см. задачу №6).

Задача №10. Столкновение релятивистских частиц

Элементарные частицы образуют особый мир - микромир. Их нельзя увидеть даже в электронный микроскоп, дающий увеличение угла зрения в миллионы раз. Ведь элементарные частицы(электроны, позитроны, мезоны, протоны, нейтроны и др.) в 10^5 раз меньше атомов, а последние во столько раз меньше размеров среднего яблока, во сколько оно меньше Земли. И все же ученным удалось проникнуть в микромир и обнаружить у элементарных частиц удивительные, иногда странные, непривычные свойства. Удалось установить время их жизни (некоторые элементарные частицы живут всего лишь 10^{-23} с, другие - «долгоживущие» исчезают, превращаясь в другие частицы, за 10^{-8} с (одна стомиллионная доля секунды!)), определены массы частиц и произведена их систематизация. И все же к концу XX в. физикам, видимо, не удастся создать полную теорию физики элементарных частиц.

Но как же физикам удалось открыть множество элементарных частиц (сейчас их известно более 300!), установить их электрический заряд, массу и другие физические характеристики? Все это удалось сделать, приводя элементарные частицы во взаимодействия, так как только в таком случае можно выявить, количественно определить физические свойства элементарных частиц, установить их «характер». Чтобы привести частицы во взаимодействие, их надо «столкнуть», предварительно увеличив их скорость, энергию движения.

Читателю, очевидно, известны различные ускорительные устройства (циклотрон, бетатрон, сихротрон и т. д.), в которых используются электрические и магнитные поля. С их помощью осуществляется процесс ускорения элементарных частиц, которые затем и приводятся во взаимодействие. В последние годы широко используется метод исследования свойств элементарных частиц, когда эти частицы летят навстречу друг другу («метод встречных пусков»). Ниже при решении задачи мы увидим преимущества этого метода.

Чтобы увидеть результат взаимодействия частиц между собой или со средой, через которую они пролетают, используются различные регистрационные устройства типа «счетчиков», различных «камер» (камера Вильсона, ионизационная, пузырьковая, и др.), фотопластинка и т. д.

Рассмотрим процесс столкновения двух элементарных частиц на примере реально осуществляющейся реакции.

Определить энергию взаимодействия неподвижного протона с налетающим на него протоном, если энергия последнего *70 ГэВ* ($1эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19} Дж;\ 1ГэВ = 10^9 эВ$).

Запишем условие задачи кратко, выберем ИСО и далее будем решать задачу по общему плану.

Найти	$E_{вз}$
Дано	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} кг$ $v_1 = 0$ $E_2 = 70 ГэВ$

Решение

Выберем ИСО «Лаборатория», в которой находятся все необходимые приборы, с помощью которых мы не только сообщим второму протону энергию E_2, но и зарегистрируем акт взаимодействия протонов между собой.

Как неоднократно указывалось ранее, в современной физике понятие ИСО расширилось до физической лаборатории, где имеется все, что необходимо для наблюдения физического процесса. В выбранной ИСО первый протон неподвижен $v_1 = 0$, второй движется со скоростью v_2. Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, уточним, что понимается в физике элементарных частиц под энергией взаимодействия: принято называть энергией взаимодействия двух элементарных частиц их общую энергию в той ИСО, в которых их суммарный импульс равен нулю.

Составим выражение для полной энергии сталкивающихся протонов в исходной ИСО «Лаборатория»:

$$E = E_{10} + E_2 = mc^2 + E_2;$$

при этом было учтено, что у первого протона есть только энергия покоя

$$E_{10} = mc^2.$$

Суммарный импульс системы в векторной форме запишется так:

$$\vec{p} = \vec{p}_{10} + \vec{p}_2 = \vec{p}_2,$$

так как первый протон неподвижен и его импульс равен нулю.

Рассматривая обе частицы в момент столкновения как одну сложную систему, составим для нее ту формулу Эйнштейна, которая является более общей, так как справедлива и для частиц, не имеющих массу, как например, фотон (см. задачу №7).

$$E = \sqrt{M^2c^4 + p^2c^2},$$

откуда $M^2c^4 = E^2 - p^2c^2$, или

$$M^2c^4 = \left(E_2 - mc^2\right)^2 - \left(E_2^2 - m^2c^4\right) = 2E_2 \cdot mc^2 + 2m^2c^4 = 2E_{10}E_2 + 2E_{10}^2$$

Следовательно, $Mc^2 = \sqrt{2E_{10}E_2 + 2E_{10}^2}$,

где M определяет суммарную массу взаимодействующих протонов.

Рассматриваемая реакция реально осуществляется на протонном ускорителе в г. Серпухове.

Так как энергия покоя протона

$E_{10} = mc^2 = 14{,}03 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 0{,}938$ ГэВ, то для величины Mc^2, которую мы рассматриваем как полную энергию системы в момент столкновения, иными словами, как энергию взаимодействия, получаем $Mc^2 \approx 11{,}54$ ГэВ.

Как видно из количественного результата, только малая доля энергии налетающего протона расходуется на саму реакцию взаимодействия.

Иначе обстоит дело, когда рассматривается взаимодействие частиц во встречных пучках. Покажем это с помощью элементарных расчетов, рассмотрев следующую задачу.

Во встречных пучках сталкивается два электрона с энергией $E_1 = E_2 = 6$ МэВ (1 МэВ$=10^6$эВ). Какова энергия взаимодействия этих частиц?

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$E_{вз}$
Дано	m_e $E = 6$ МэВ $E_1 = E_2 = E$ $v_1 = v_2 = v$ $E_0 = 0{,}51$ МэВ

Решение

Выберем ИСО «Центр масс». Но в данной задаче она совпадает с ИСО «Лаборатория», так как одинаковые частицы - электроны - движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и их центр масса неподвижен в ИСО «Лаборатория».

Энергия взаимодействия равна энергии относительного движения электронов, если суммарный импульс системы до и после столкновения равен нулю. Энергию относительного движения мы определим по формуле:

$$E_{ОТН} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

где V - скорость относительного движения электронов относительно друг друга. Эту величину определим так. Выберем новую ИСО «1-й электрон», в которой второй электрон как раз и имеет скорость V. Воспользуемся формулой теоремы сложения скоростей СТО в одномерном движении:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Применительно к нашей задаче $u_x = V,\ v = v_1,\ u'_x = v_2 = v$ - скорость 2-го электрона в ИСО «Лаборатория».

Тогда $$v = \frac{V - v}{1 - \frac{Vv}{c^2}}.$$

Разрешим это равенство относительно V, получаем

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

Теперь имеем возможность рассчитать E_{B3} через данные задачи

$$E_{B3} = E_{OTH} = \frac{E_0\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Из формулы $E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ можно определить $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{E_0^2}{E_1^2}$,

соответственно $1 + \frac{v^2}{c^2} = 2 - \frac{E_0^2}{E_1^2}$.

Составим выражение для E_{B3}

$$E_{B3} = E_{OTH} = \frac{E_0 E_1^2\left(2 - \frac{E_0^2}{E_1^2}\right)}{E_0^2} \cong \frac{2E_1^2}{E_0},$$

где сделано разумное упрощение, так как $\frac{E_0^2}{E_1^2} << 1$.

Подставляя числовые данные, получаем, что на взаимодействие электронов во встречных пучках в ИСО «Лаборатория» приходится энергии

$$E_{B3} = \frac{2 \cdot 36(МэВ)^2}{0,51МэВ} = 141МэВ.$$

Результат этой задачи показывает, как перспективен метод взаимодействия частиц на встречных пучках.

Интересен вопрос о том, в каком ускорителе можно получить тот же эффект. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть одна частица сталкивается с другой, которая неподвижна в данной ИСО. В момент столкновения образуется промежуточная частица, для которой формула Эйнштейна будет иметь вид:

$$\left(mc^2 + E\right)^2 = M^2c^4 + p^2c^2$$

или
$$M^2c^4 = \left(mc^2 + E\right)^2 - p^2c^2,$$

где M - масса промежуточной частицы, E - ее энергия, p - ее импульс, а m - масса неподвижной частицы.

Преобразуем последнее соотношение:

$$M^2c^4 = m^2c^4 + 2mc^2E + E^2 - p^2c^2.$$

Но $\left(E^2 - p^2c^2\right)$ равняется квадрату массы налетающей частицы, умноженной на c^4, следовательно,

$$M^2c^4 = m^2c^4 + 2mc^2E + m^2c^4 = 2m^2c^4 + 2mc^2E.$$

Нам нужно найти такой ускоритель, который сообщает ускоряемой частице энергию, равную энергии, выделяющейся при столкновении встречных пучков. Поэтому приравняем $Mc^2 = 2E$,

тогда
$$4E^2 = 2m^2c^4 + 2mc^2E_x,$$

откуда
$$E_x = \frac{4E^2 - 2m^2c^4}{2mc^2} = \frac{2E^2}{mc^2} - mc^2 \approx \frac{2E^2}{mc^2}.$$

Если $E=70ГэВ$, $m=m_p=0,938ГэВ$, $c = 3 \cdot 10^8 м/с$, то

$$E_x = 10^5 ГэВ!$$

Полученный результат означает, что ускоритель на встречных пучках эквивалентен по эффективности одиночному ускорителю с неподвижной мишенью, сообщающей частице энергию $10^5 ГэВ$. Такие ускорители еще не построены...