§8. Длина и длительность в ОТО

Рассмотрим этот вопрос сначала качественно. Пусть имеется НСО “L’”, равномерно вращающаяся относительно ИСО вокруг общей оси $0z$ ($O'z'$). Расположим в плоскости xOy окружность с центром на оси вращения. В евклидовой геометрии отношение длины этой окружности $2\pi r$ к ее диаметру $2r$ равно π. Но с точки зрения наблюдателя, находящегося в НСО “L’”, окружность будет вращаться, и все элементы ее длины будут иметь протяженность в $\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ раз меньше, чем в ИСО “L” (v - линейная скорость вращения точек окружности в НСО “L’”). Следовательно, отношение длины окружности к диаметру, который расположен перпендикулярно к направлению скорости, и его размеры, естественно, неизменны для наблюдателя в НСО “L’ ”, будет отличаться от π. Мы снова убеждаемся, что геометрические соотношения в НСО оказываются неевклидовыми. А так как НСО эквивалентна некоторому гравитационному полю, то можно утверждать что геометрия (метрика) в гравитационном поле неэвклидова.

Теперь убедимся, что и ритм часов в НСО (и соответственно в эквивалентном гравитационном поле) отличен от ритма часов в ИСО в отсутствии гравитационного поля).

Расположим одни часы неподвижно на оси $0'z'$, а другие тождественные часы на окружности в плоскости $x0y$, вращавшейся относительно наблюдателя в НСО “L’ ”с линейной скоростью v. Но движущиеся часы (с точки зрения неподвижного наблюдателя) идут медленнее неподвижных в $\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ раз. Это является строгим выводом СТО и имеет экспериментальное подтверждение. Таким образом, и свойства времени изменяются при переходе к НСО. А так как НСО может быть заменена ИСО в некотором эквивалентном гравитационном поле, то полученный результат можно сформулировать следующим образом: в гравитационном поле ход часов замедляется по сравнению с их ходом в отсутствии гравитационного поля в некоторой ИСО.

Отметим при этом принципиальное различие относительности временных промежутков в СТО и ОТО. В СТО эта относительность носила кинематический характер, в ОТО в результате действия гравитационного поля, изменения метрики пространства-времени, замедление хода часов – реальный процесс. Часы в ИСО и в НСО находятся в разных физических условиях: в СТО не учитывается влияние гравитационного поля (именно поэтому пространство однородно и изотропно, а время однородно), в ОТО именно из-за гравитационного поля происходит изменение метрики пространства – времени, оно становится неевклидовым, ход часов в гравитационном поле замедляется по сравнению с их ходом в отсутствии гравитационного поля.

Теперь придадим предыдущим рассуждениям и выводам математическое выражение. Как и в СТО, в ОТО вводится понятие собственного времени в данной точке пространства. Для его измерения в каждой точке пространства помещаются физически эквивалентные часы. Время, измеренное по таким часам, и есть собственное время в данной точке четырехмерного многообразия. Обозначим бесконечно малый промежуток собственного времени через dt. Используя общее выражение для интервала (2.5):

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

и учитывая, что измерения производятся в одной точке, т.е. $dx=dy=dz=0$, а в этом случае $dt=d\tau$, получаем для интервала собственного времени соотношение

$$dS^2 = -c^2d\tau^2. \qquad (8.1)$$

Для нахождения связи собственного времени τ с лабораторным временем t воспользуемся полным выражением для квадрата интервала двух бесконечно близких событий (7.11):

$$dS^2 = \sum_{a,b} g_{a,b}\, dx_a\, dx_b. \qquad (7.11)$$

Учитывая, что $dx_1=dx_2=dx_3=0$, получаем:

$$dS^2 = g_{44}dx_4^2 = -c^2dt^2,$$

откуда

$$dt^2 = -\frac{g_{44} dx_4^2}{c^2}$$

или

$$dt = \frac{(-g_{44})^{1/2} dx_4}{c}. \qquad (8.2)$$

Для конечных промежутков времени

$$t = \frac{1}{c}\int (-g_{44})^{1/2} dx_{44}. \qquad (8.3)$$

Если g_{44} является функцией координат x_1, x_2, x_3, то собственное время τ в разных точках пространства течет по-разному; если же g_{44} зависит и от времени x_4, то изменяется и темп собственного времени в данной точке пространства.

В самом простом случае при постоянном гравитационном поле синхронизацию часов можно производить локационным методом, время x_4 обычно называется мировым временем.

Обратимся теперь к измерению расстояния между двумя мировыми точками. Снова воспользуемся локационным методом, в котором предполагается постоянство скорости света (электромагнитных волн) в любом направлении. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть из мировой точки В в бесконечно близкую точку А направляется свет, испытав отражение, он возвращается в точку В. На весь процесс потребовалось время (по часам в точке В) $d\tau$. Тогда расстояние между точками В и А можно определить по формуле:

$$dl = c\frac{dt}{2}. \qquad (8.4)$$

Для дальнейших рассуждений восстановим подобную операцию в специальной теории относительности .Светоподобный интервал между событиями (отправка светового сигнала в точку А из точки В и возвращение его в точку В) равен нулю: т.е. $dS^2=0$, откуда

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dx_4^2 = 0$$

или

$$dx_4 = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (8.5)$$

Для определения времени $d\tau$, прошедшего в точке В между отправкой и возвращением сигнала, запишем и сравним между собой временные координаты отправки и возвращения светового сигнала. Отправка сигнала произошла в момент времени (x_4-dx_4), соответственно возвращение сигнала произошло в момент времени (x_4+dx_4), время движения сигнала $2dx_4$.

Отсюда, с учетом значения $g_{44}= -1$ (т.к мы приняли в данной задаче, что $x_4=ct$), формула (8.2) запишется так:

$$dt = \frac{2|dx_4|}{c} = \frac{2}{c}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^{1/2}$$

Подставляя это в формулу (8.4), получаем выражение, определяющее расстояние между двумя бесконечно близкими точками:

$$dl = c\frac{d\tau}{2} = \frac{c}{2}\cdot\frac{2}{c}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ ,$$

что и следовало ожидать для “плоских “ евклидовой и псевдоевклидовой геометрий.

Проведем аналогичные рассуждения и для случая неевклидовой геометрии, где метрика задается формулой (7.11):

$$dS^2 = \sum g_{a,b}\, dx_a \cdot dx_b\ , \text{ где } \alpha,\ \beta = 1,2,3,4. \qquad (7.11)$$

Как и в задаче, рассмотренной выше, воспользуемся процессом распространения светового сигнала между точками В и А. В этом случае интервал для процесса распространения света также является светоподобным, т.е $dS^2=0$. Запишем его подробно:

$$dS^2 = 0 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2 + 2g_{12}dx_1.dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{23}dx_2dx_3 + +2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4.$$

Более компактно это выражение можно записать так:

$$g_{44}dx_4^2 + 2g_{i4}dx_i dx_4 + g_{ik}dx_i.dx_k = 0, \qquad (8.6)$$

где $i,k = 1,2,3$.

При составлении этого уравнения мы опустили знак суммирования , что часто практикуется в физической научной литературе, при этом руководствуются следующим правилом: если сомножители имеют повторяющиеся индексы, то по ним ведется суммирование. Выражение (8.6) записано согласно этому правилу. Выражение (8.6) по форме является квадратным уравнением относительно величины dx_4. Его решение запишется так:

$$dx_4 = \frac{1}{g_{44}}\left[-g_{4i}dx_i + \left((g_{4i}g_{4k} - g_{ik}g_{44})dx_i dx_k\right)^{1/2}\right] \qquad (8.7)$$

где использовано легко проверяемое тождество

$$(-g_{i4}dx_i)^2 = (-g_{i4}dx_i)(-g_{k4}dx_k) = g_{i4}g_{k4}dx_i dx_k.$$

Кроме того, перед квадратным корнем взят только знак (+), т.к. $dx_4>0$.

Прежде чем перейти к собственному времени по формуле (8.2), учтем, что в этом выражении стоит суммарная величина , учитывающая движение светового луча от В к А и его возвращение снова к В. Поэтому у dx'_4 поставим знак штриха. Но при удвоении величины dx'_4 (время движения “туда” и “обратно”) необходимо учесть, что в первой части пути светового луча $dx_i>0$ (направление от точки В к точке А считается положительным на оси $0x$), во второй части пути (возвращение к точке А) - $dx_i<0$. Поэтому складывая выражение (8.7) для нахождения полного времени движения луча, получаем:

$$dx'_4 = \frac{2}{g_{44}}\left|(g_{4i}g_{4k} - g_{ik}g_{44})dx_i dx_k\right|^{1/2}. \qquad (8.8)$$

Итак,

$$dt = \frac{2}{c(-g_{44})^{1/2}}\left[(g_{4i}g_{4k} - g_{ik}g_{44})dx_i dx_k\right]^{1/2} \qquad (8.9)$$

Таким образом, элемент длины можно рассчитать по формуле:

$$dl = \frac{1}{(-g_{44})^{1/2}}\left[(g_{4i}g_{4k} - g_{ik}g_{44})dx_i dx_k\right]^{1/2} \qquad (8.10)$$

Обычно используется не величина dl, а dl^2, поэтому возведем во вторую степень выражение (8.10):

$$dl^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{i4} g_{k4}}{g_{44}} \right) dx_i dx_k . \qquad (8.11)$$

Мы получили пространственную часть квадрата интервала dS^2, ее так и называют пространственным интервалом. Роль пространственного метрического тензора играет величина

$$\gamma_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{i4} g_{k4}}{g_{44}} . \qquad (8.12)$$

Поэтому формуле (8.11) можно придать следующий вид, используя (8.12):

$$dl = \left(\gamma_{ik} dx_i dx_k \right)^{1/2} \qquad (8.13)$$

Если можно ввести единое время, т.е. величина γ_{ik} не будет зависеть от времени, то формула (8.13) позволяет определить расстояние между двумя бесконечно близкими точками.

§9. Нахождение компонент метрического тензора

В §7 мы установили, что отличие геометрии пространств – времени от Евклидовой можно определить не только путем нахождения формул преобразования для перехода от одной СО к другой, но и путем нахождения компонент метрического тензора. Отличие их от галилеевых значений (1, 1, 1, -1) покажет не евклидовость геометрии в рассматриваемой задаче. В данном параграфе мы покажем, как можно определить компоненты метрического тензора.

Выразим энергию материальной точки через элемент интервала. Сначала сделаем это в рамках специальной теории относительности, т.е. в отсутствии гравитационного поля. Ограничимся малыми скоростями, что существенно упростит решение поставленной задачи.

Воспользуемся формулой для энергии свободно движущейся материальной точки:

$$E=\frac{mc^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}=\frac{mc^2}{\left(1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}\right)^{1/2}}. \qquad (9.1)$$

Проведя элементарные преобразования (привести к общему знаменателю под знаком корня, вынести из-под корня cdt, поменять члены местами, ввести обозначение для мнимой единицы), формуле (9.1) можно придать иной вид:

$$E=mc^3\frac{dt}{i\left(dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2\right)^{1/2}}. \qquad (9.2)$$

Рассматривая dx ,dy, dz, dt как независимые переменные, нетрудно убедиться в справедливости тождества:

$$\frac{-c^2dt}{\left(dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2\right)^{1/2}}=\frac{\partial}{\partial(dt)}\left(dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2\right)^{1/2}=$$
$$=\frac{\partial(dS)}{\partial(dt)}, \qquad (9.3)$$

где учтено, что $dS^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$. Используя тождество (9.3), формулу (9.2) можно записать так:

$$E=-\frac{mc}{i}\frac{\partial(dS)}{\partial(dt)} \qquad (9.4)$$

В гравитационном поле выражение для элемента интервала обобщено формулой (7.11):

$$dS=\left(\sum_{a,b=1}^{4}g_{a,b}\,dx_a\,dx_b\right)^{1/2} \qquad (9.5)$$

Далее для удобства будем обозначать через $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=t$. Предполагая, что формула (9.4) с учетом (9.5) справедлива и при наличии гравитационного поля (что впоследствии оправдывается получающимися следствиями), получим для вычисления энергии следующее выражение:

$$E=-\frac{mc}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial(dx_4)}\left(\sum_{a,b=1}^{4}g_{a,b}\,dx_a\,dx_b\right)^{1/2}=-\frac{mc}{i}\frac{\partial}{\partial(dx_4)}(g_{11}dx_1^{\,2}+$$

$$+\,g_{22}dx_2^{\,2}+g_{33}dx_3^{\,2}+g_{44}dx_4^{\,2}+2g_{12}dx_1dx_2+2g_{13}dx_1dx_3++2g_{14}dx_1dx_4++2g_{23}dx_2dx_3+$$

$$+\,2g_{24}dx_2dx_4+2g_{34}dx_3dx_4)^{1/2}\quad. \qquad (9.6)$$

Выполняя дифференцирование, получим:

$$E=-\frac{mc}{i}\frac{g_{44}dx_4+g_{34}dx_3+g_{24}dx_2+g_{14}dx_1}{\left(\sum_{a,b=1}^{4}g_{a,b}\,dx_a\,dx_b\right)^{1/2}}\quad. \qquad (9.7)$$

В том случае, когда гравитационное поле достаточно слабое, компоненты метрического тензора должны мало отличаться от своих "галилеевых" значений (1,1,1,-c^2) и можно считать, что

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1+p;\quad g_{44}=-c^2(1+q);\quad g_{a,b}=r_{a,b}\,,$$

причем $a\neq b$, а $p, q, r_{\alpha\beta}$ малы по сравнению с единицей. Тогда выражение для энергии примет вид (детальный вывод этого соотношения дан в Приложении 1.):

$$E=mc^2\left(1+q-r_{34}\frac{u_z}{c^2}-r_{24}\frac{u_y}{c^2}-r_{14}\frac{u_x}{c^2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}1+q-\dfrac{u^2}{c^2}(1+p)-2r_{12}\dfrac{u_xu_y}{c^2}-2r_{13}\dfrac{u_xu_z}{c^2}-2r_{23}\dfrac{u_yu_z}{c^2}-2r_{14}\dfrac{u_x}{c^2}-\\-2r_{24}\dfrac{u_y}{c^2}-2r_{34}\dfrac{u_z}{c^2}\end{array}\right)^{-1/2}, \qquad (9.8)$$

где использованы обозначения

$$\frac{dx_1}{dt}=u_x,\ \frac{dx_2}{dt}=u_y,\ \frac{dx_3}{dt}=u_z.$$

Учитывая условие рассматриваемой задачи (слабость гравитационного поля), пренебрежем членами второго порядка малости по сравнению с q и $\dfrac{u^2}{c^2}$ (т.е. отбросим члены, содержащие p и $r_{\alpha\beta}$). Тогда формула (9.8) существенно упрощается и записывается так:

$$E = mc^2 \frac{(1+q)}{\left(1+q-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \approx mc^2(1+q)\left(1-\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{c^2}\right)= \tag{9.9}$$
$$= mc^2 + \frac{mu^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot qmc^2 .$$

Сравнивая формулу (9.9) с выражением для энергии нерелятивистской частицы в ньютоновом гравитационном поле (с добавлением энергии покоя):

$$E = mc^2 + \frac{mu^2}{2} + mj \;, \tag{9.10}$$

где φ - так называемый гравитационный потенциал - потенциальная энергия тела единичной массы в поле тяготения тела массы М:

$$j = -\frac{GM}{r} \, ,$$

получим равенство:

$$mc^2 + \frac{mu^2}{2} + \frac{qmc^2}{2} = mc^2 + \frac{mu^2}{2} + mj \; .$$

Из сравнения подобных членов слева и справа в этом равенстве получаем: $q = \dfrac{2j}{c^2}$.

Это позволяет тотчас же получить значение для g_{44}:

$$g_{44} = -c^2\left(1+\frac{2j}{c^2}\right) = -c^2 - 2j \; . \tag{9.11}$$

Таким образом, оказалось, что g_{44} отлично от галилеевского значения, следовательно, это дает нам право утверждать, что четырехмерное пространство-время в нашей задаче оказалось неевклидовым.

В рассматриваемом приближении, если события, связанные интервалом dS, происходят в одной точке ($dx=dy=dz=0$), то квадрат интервала dS запишется так:

$$dS^2 = -(c^2 + 2\varphi)dt^2 . \tag{9.12}$$

С другой стороны, dS^2 связано с собственным временем $d\tau$ соотношением:

$$dS^2 = -c^2 d\tau^2 . \tag{9.13}$$

Сравнивая правые стороны выражений (9.12) и (9.13), получаем чрезвычайно важный вывод о темпе собственного времени в гравитационном поле:

$$d\tau = dt\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{9.14}$$

Из формулы (9.14) следует, что собственное время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного потенциала ($\varphi < 0!$), т.е. чем сильнее в данной точке гравитационное поле. Замедление темпа хода времени в гравитационном поле обнаружено экспериментально: в спектрах Солнца и звезд обнаружено смещение спектральных линий в сторону низких частот относительно тех же линий, полученных в земных условиях, где модуль гравитационного потенциала меньше, чем на Солнце или звездах. Это явление получило название красного смещения спектральных линий (читатель не должен путать это смещение спектральных линий с тем, которое обусловлено движением источника излучения; последнее явление называется доплеровским смещением, в специальной теории относительности так называемый поперечный эффект Доплера явился экспериментальным подтверждением относительности временных промежутков). В отличие от относительности временных промежутков, которое устанавливает СТО, изменение хода времени в гравитационном поле носит абсолютный характер, т.е. не зависит от выбора системы отсчета (как в СТО). Мы вернемся к этому эффекту ОТО, объясняя так называемый “парадокс близнецов”.

Так как при рассмотрении спектральных линий за основную характеристику принимают частоту колебаний, определяющих данную линию в спектре, то преобразуем формулу (9.14), перейдя к частоте. В интегральном виде формула запишется так:

$$t = t\left(1+\frac{2j}{c^2}\right)^{1/2} \approx t\left(1+\frac{j}{c^2}\right). \qquad (9.15)$$

Так как частота колебаний обратно пропорциональна периоду колебаний, то для соотношения частот получаем:

$$w = \frac{w_0}{1+\dfrac{j}{c^2}} \approx w_0\left(1-\frac{j}{c^2}\right), \quad \varphi < 0, \qquad (9.16)$$

где ω_0 - частота световых колебаний в отсутствии гравитационного поля. Из формулы (9.16) следует, что частота колебаний световых волн увеличивается при возрастании абсолютной величины гравитационного поля.

Для примера рассмотрим изменение частоты световых волн, испущенных звездой, при измерении земным наблюдателем (приборами, находящимися на Земле). В нерелятивистском приближении гравитационный потенциал звезды на расстоянии до Земли равен:

$$j = \frac{П}{m} = -\frac{\dfrac{GmM}{R}}{m} = -\frac{GM}{R}.$$

Подставляя значение φ в формулу (9.16), получаем:

$$w = w_0\left(1+\frac{GM}{Rc^2}\right), \qquad (9.17)$$

т.е. частота света, испущенного звездой, больше ω_0 - частоты, воспринимаемой на Земле. Смещение спектральной линии на земной спектрограмме произойдет на величину

$$\Delta w = w_0\frac{GM}{Rc^2}. \qquad (9.18)$$

Это гравитационное смещение спектральных линий в красной части спектра Солнца оказывается на пределе точности измерительных приборов. Однако для очень плотных звезд, например, белых карликов, это изменение частоты измеряемо и служит подтверждением выводов ОТО.

Запуск искусственных спутников Земли предоставил еще одну возможность проверки предсказаний ОТО. В противоположность рассмотренному выше эффекту, смещение частоты радиоволны, испущенной с искусственного спутника, произойдет не в красную, а в фиолетовую часть спектра, так как электромагнитные колебания переходят из области, где потенциал земного поля меньше, в область с большим гравитационным потенциалом. Подтвердим эти рассуждения математически. Воспользуемся формулой (9.17), составим ее для двух положений искусственного спутника, на некоторой высоте Н и на поверхности Земли (*R* - радиус Земли):

$$w_1 = w_0\left(1 - \frac{j_{R+H}}{c^2}\right) = w_0\left(1 + \frac{GM}{c^2(R+H)}\right) \qquad (9.19)$$

и

$$w_2 = w_0\left(1 - \frac{j_R}{c^2}\right) = w_0\left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right).$$

Составляя разность последних выражений , получаем:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \omega_0 \frac{GMH}{c^2 R^2}\left(1 - \frac{H}{R}\right).$$

А так как $\frac{GM}{R^2} = g$ - ускорение свободного падения на Земле, то

$$\frac{\Delta w}{w} \approx \frac{gH}{c^2}\left(1 - \frac{H}{R}\right). \qquad (9.20)$$

Так, для высоты *H=1500 км* $\frac{\Delta w}{w} = 10^{-10}$, то с помощью так называемых молекулярных генераторов или атомных часов, имеющих предел стабильности частоты порядка 10^{-10}, удается обнаружить изменение частоты радиоволн, испущенных с искусственных спутников и принятых на Земле. Задача усложняется из-за наложения эффекта Доплера, упомянутого выше. Поэтому наблюдают излучение передатчиков спутника тогда, когда он двигается относительно медленно, т.е. находится вблизи своего перигелия.

В 60-х годах на "вооружение" исследователей поступил только что обнаруженный эффект Мёссбауэра, суть которого состоит в том, что испускание или поглощение гамма -квантов атомными ядрами сильно взаимодействующих частиц кристаллического твердого тела практически не сопровождается потерей энергии и количества движения на отдачу, в результате чего спектральные линии имеют чрезвычайно малую естественную ширину. Поэтому ядра кристаллической решетки могут поглотить лишь электромагнитные колебания (гамма -кванты) определенной частоты - резонансной частоты. На этом свойстве эффекта Мёссбауэра основан метод проверки рассматриваемого предсказания ОТО. Два американских физика Паунд и Ребекка поставили следующий опыт. На высоте около 20 м помещался источник квантов - возбужденные ядра атомов железа, расположенных в узлах кристаллической решетки. Кванты регистрировались на поверхности Земли поглощением обычными атомами железа. Но ОТО предсказывала, что "падающие" на Землю гамма -кванты должны изменять свою частоту (в данном опыте частота должна увеличиваться) и они не должны восприниматься нормальными атомами. Несмотря на ничтожно малую величину относительного изменения частоты (всего на $2{,}5.10^{-15}$),опыт подтвердил предсказание ОТО, ядра детектора на Земле не воспринимали гамма -кванты.

§10. "Парадоксы" ОТО

Как и в специальной теории относительности, в ОТО "парадоксы" позволяют не только опровергнуть рассуждения, основанные на так называемом "здравом смысле"(обыденном, житейском опыте), но и дать правильное, научное объяснение