§4. Гравитационная постоянная

Формула закона Всемирного тяготения (ЗВТ) может быть практически использована только тогда, когда нами будет определена гравитационная постоянная. Только тогда можно будет рассчитывать силу тяготения двух массивных тел, или массу одного из них, или расстояние между ними (предполагается, что другие величины в формуле (3.1) определены независимыми способами).

Первым ученым, который определил гравитационную постоянную, был английский физик Генри Кавендиш (1731-1810). Ниже мы опишем идею его эксперимента, осуществленного в 1798г. А сейчас покажем, как Кавендиш “взвесил” Землю, определил ее среднюю плотность.

Для произвольного тела, расположенного на поверхности Земли, можно написать:

$$mg = G\frac{m \cdot M_з}{R^2}. \qquad (4.1)$$

Из (4.1) определяем массу Земли:

$$M_з = g\frac{R^2}{G}$$

и ее средняя плотность:

$$\overline{r} = \frac{M_з}{V_з}.$$

С другой стороны, зная как движется Земля вокруг Солнца, можно определить ее ускорение, а затем и силу, создающую это ускорение: $F_{с-з} = M_з a_з$.

Используя формулу ЗВТ, можно рассчитать и массу Солнца:

$$F_{с-з} = G\frac{M_з \cdot M_с}{R_{с-з}^2}, \quad \text{откуда} \quad M_с = \frac{F_{с-з} \cdot R_{с-з}^2}{G \cdot M_з}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение $F_{с-з}$ и заменяя $a_з$ через ее выражение

$$a_з = \frac{v_з^2}{R_{с-з}} \ ,$$

окончательно получаем возможность “взвесить” и Солнце:

$$M_с = \frac{v_з^2 \cdot R_{с-з}}{G} \, ,$$

где $v_з$ - линейная скорость Земли на ее орбите.

Во все основные формулы, полученные выше, входит гравитационная постоянная. Отсюда видно, как важно знать значение этой величины. При этом необходимо было получить значение гравитационной постоянной, производя опыты не с небесными телами, а с телами, находящимися на Земле. Это тем более важно было сделать, так как гениальный И. Ньютон распространил действие ЗВТ и на взаимодействия тел на Земле.

Г. Кавендиш использовал в своей установке так называемый метод крутильных весов. На рисунке 2. изображена схема опыта Кавендиша. На тонком стержне закреплены два небольших свинцовых шарика с массами m=50г (1,2). Стержень уравновешен, и на нити подвеса укреплено легкое зеркальце (3). В горизонтальной плоскости расположения грузиков (1,2) находятся центры больших грузов (3,4), каждый по массе M = 50 кг. Вся установка помещена в стеклянный шкаф, чтобы устранить влияние движения воздуха.

Опыт проводится дважды, второе перемещенное положение грузов (3,4) на рисунке изображено пунктиром.

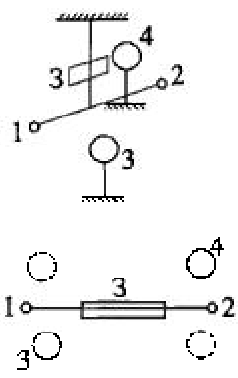

Рис.2

Для первой части опыта получается следующее соотношение, выражающее равенство сил гравитационного притяжения двух пар шаров (1-3) и (2-4) упругой силы, возникающей в нити подвеса при ее закручивании:

$$2G\frac{m \cdot M}{R^2} = ka_1 \, ,$$

где α_1 - угол закручивания нити (в радианах), k - коэффициент упругости нити подвеса.

После перемещения грузов (3 и 4), соотношение для равенства сил запишется так:

$$2G\frac{m \cdot M}{R^2} = ka_2.$$

При этом предполагается, что в силу ряда причин (неоднородность нити, ошибка при снятии показания и т.д.) углы закручивания α_1 и α_2 не равны друг другу. Сложим эти равенства:

$$4G\frac{m \cdot M}{R^2} = k(a_1 + a_2). \qquad (4.2)$$

Коэффициент упругости нити определялся с помощью крутильного маятника (грузы 3 и 4 удаляются, стержень несколько раз поворачивается вокруг вертикальной оси-нити подвеса и освобождается; под действием упругой силы в нити подвеса коромысло установки начинает совершать крутильные колебания с периодом *T*, который связан с коэффициентом упругости "*k*" по формуле

$$T = 2p\sqrt{\frac{J}{k}},$$

где - *J* момент инерции системы. Считая стержень легким ("невесомым") по сравнению с массами грузов (1,2), рассчитаем момент инерции системы по формуле (*l* - длина стержня):

$$J = 2J_1 = 2\frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{2}.$$

Таким образом, в формуле (4.2) известны все величины, кроме *G*.

Расчеты, проведенные Кавендишем, дали следующее значение гравитационной постоянной:

$$G = (6{,}67 \pm 0{,}05)10^{-11}\ Н \cdot м^2кг^{-2},$$

которое практически совпадает с современным значением этой величины ($6{,}672 \pm 0{,}004)\ 10^{-11}\ Н\ м^2кг^{-2}$).

В силу важности рассматриваемой величины, определение ее численного значения продолжается и до настоящего времени, при этом используются методы, принципиально отличающиеся

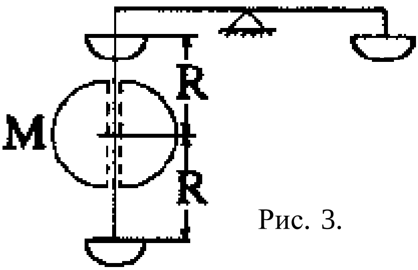

Рис. 3.

от метода Кавендиша. Рассмотрим еще один способ нахождения гравитационной постоянной, разработанный французским физиком Жолли (1878 г.). На рычажных весах уравновешен небольшой груз (рис.3) массы m.

С левой стороны весов (см. рис.3) имеются две чашечки, соединенные нитью, пропущенной через канал в независимо от весов закрепленном шаре. В первой части опыта грузик размещается на левой нижней чашке, а во второй части опыта -слева же, но на верхней чашке. Если еще можно пренебречь изменением расстояния от малого груза до центра Земли, то уже изменением положения малого груза до большого пренебречь нельзя.

Когда груз "m" находится на верхней чашке, на него действуют две силы, направленные в одну сторону - вертикально вниз, их результирующая равна арифметической сумме сил $G\frac{m \cdot M}{R^2}$ и $m \cdot g$. Когда же груз "m" перемещается на нижнюю чашку, результирующая сила, действующая на этот груз "m", равна разности сил $G\frac{m \cdot M}{R^2}$ и mg, причем сила тяжести mg больше, чем сила притяжения тела "m" к шару M. Равновесие весов после перемещения груза "m" должно нарушиться. Изменяя величину веса гирьки на другой чашке весов, можем восстановить равновесие. Найдя величину довеска, восстанавливающего равновесие рычажных весов DP, можно приравнять ее к величине

$$2\ G\frac{m \cdot M}{R^2},$$

которую легко получить, составляя разность равнодействующих сил, испытываемых грузом "m" в двух частях опыта.

Расчет дал следующее значение для гравитационной постоянной в опыте Жолли: $G = (6{,}6732 \pm 0{,}0031) \cdot 10^{-11} H \cdot m^2 \cdot кг^{-2}$.

Дополнение

До сих пор мы преимущественно говорили о значении ЗВТ (в том числе и гравитационной постоянной) для определения сил тяготения или масс, или расстояний между тяготеющими телами. Но знание более точного значения гравитационной постоянной необходимо и для земных дел. Приведем цитату из статьи "Гравиметрия" (наука о земном поле тяжести и связи его с фигурой Земли, ее внутренним строением и строением земной коры), помещенной в Физическом энциклопедическом словаре (ФЭС) изд.1, 1960 г., т1, с.585, из которой будет ясно, сколь важно как можно точнее знать характеристики земного поля тяготения:

"Изучение гравитационного поля Земли позволяет решить многие задачи геодезии и геофизики. Так, построение нормального гравитационного поля дает возможность определить сжатие земного эллипсоида. Изучение аномалий силы тяжести позволяет вычислить уклонения геоида от эллипсоида. Поскольку аномалия силы тяжести вызывается неравномерным распределением масс в земной коре, по характеру гравитационного поля можно судить о наличии изменений плотностей в районе исследования; так, *возможно обнаружить различные геологические структуры и залежи полезных ископаемых*. Изучение изменений "g" (так называемые вариации силы тяжести) в совокупности с повторным нивелированием открывает новые возможности в изучении геологических процессов, происходящих в земной коре. Периодические изменения "g" позволяют судит о приливных явлениях в твердой оболочке Земли, что, в свою очередь, дает возможность сделать выводы об упругих свойствах Земли".

§5. Инертная и гравитационная массы

То, о чем будет идти речь в этом очерке, частично уже обсуждалось ранее. Но вопрос настолько важен для построения ОТО, что кое-что из предыдущего необходимо повторить.

Согласно закону Всемирного тяготения, сформулированному И. Ньютоном, сила притяжения между двумя точечными частицами прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Но если в уравнениях движения классической механики масса выступала как мера инертности тела, то в ЗВТ масса характеризует совершенно иное свойство тела - она выступает как гравитационный “заряд”. Такое название для гравитационной массы напрашивается, если сравнить формулы законов тяготения и электростатического взаимодействия (закона Кулона):

$$F_{тяг} = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \quad и \quad F_{эл} = k\frac{q_1 q_2}{R^2}, \quad k = \frac{1}{4pe_0}. \quad (5.1)$$

Поскольку в уравнениях движения и в формуле ЗВТ речь идет о двух различных свойствах тела, которые могли быть совершенно не связанными друг с другом, то, вообще говоря, должны были быть введены две различные физические величины - инертная масса “$m_и$”, характеризующая степень инертности тела, и гравитационная масса “$m_г$”, характеризующая его гравитационный “заряд”:

$$F = m_и \,.\, a \quad \text{и} \quad F = G\frac{m_г M_г}{R^2} \quad (5.2)$$

Однако существует следующий факт, совершенно надежно с огромной точностью подтвержденный экспериментально: для всех тел гравитационная масса тела $m_г$ и его инертная масса $m_и$ строго пропорциональны друг другу, т.е. для всех тел отношение гравитационной и инертной масс $m_г/m_и$ одинаково и, следовательно, представляет собой некую универсальную постоянную. С этим удивительным свойством массы человек сталкивается с первых шагов своего существования: чем тяжелее тело (т.е. чем больше его гравитационная масса), тем труднее изменить его состояние (тем больше его инертная масса). Поэтому представление о тождестве инертной и гравитационной масс настолько кажется естественным, что мы забываем о том, что имеем дело с характеристиками совершенно различных свойств тела.

Совпадение гравитационной и инертной масс с научной точки зрения отнюдь не является очевидным, само собой разумеющимся. Оно стало для нас таким в силу многовековой привычки к этому факту. Но существуют и научные эксперименты, подтверждающие совпадение $m_и$ и $m_г$. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть тело покоится на поверхности Земли. Мы можем выразить силу тяжести этого тела двумя способами: через его инертную массу с помощью второго закона Ньютона и через его гравитационную массу с помощью ЗВТ.

По второму закону механики имеем:

$$F = m_г \cdot g. \tag{5.3}$$

На основании ЗВТ получим:

$$F = G\frac{m_г M_з}{R^2}. \tag{5.4}$$

где $M_з$ - масса Земли, R - радиус Земли.

Приравнивая правые части равенств (5.3) и (5.4), находим:

$$m_и g = G\frac{m_г M_з}{R^2}$$

откуда отношение гравитационной и инертной масс тела оказывается равным:

$$\frac{m_г}{m_и} = g\frac{R^2}{GM_з}. \tag{5.5}$$

Так как множитель $R^2/G \cdot M_з$ в правой части соотношения (5.5) одинаков для всех тел в данном месте Земли (и в любом месте, если считать Землю шаром постоянного радиуса R), то отношение гравитационной и инертной масс тела может зависеть только от ускорения свободного падения g, которое получают тела при свободном падении под действием силы тяжести.

С огромной точностью установлено, что в данной точке земной поверхности все тела получают под действием силы тяжести одно и то же ускорение независимо от массы тела, его формы, химического состава и т.д. Впервые опытная проверка этого утверждения проводилась еще Галилеем, а затем с большей точностью и другим методом - И. Ньютоном. В опытах Галилея (о них мы говорили в §3) проверка постоянства g основывалась на измерении времени падения тел с высоты Пизанской башни. В опытах же Ньютона производились измерения периода колебаний математического маятника с одной и той же длиной нити, к которой подвешивались грузы разной массы. В силу важности обсуждаемой проблемы рассмотрим более подробно сущность опытов Ньютона с математическими маятниками.

Как известно, период малых колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения g и определяется по формуле:

$$T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5.6)$$

Поэтому при одинаковой длине маятников различие периодов колебания означало бы различие ускорений свободного падения для различных тел.

Формула (5.6) является приближенной. Точная формула для периода малых колебаний дается при решении дифференциального уравнения движения колеблющегося тела. При малых амплитудах колебания уравнение движения запишется так:

$$m_и \frac{d^2(la)}{dt^2} = -m_г g \sin a = -m_г g a, \qquad (5.7)$$

где использовано приближенное соотношение при малых углах отклонения α: $\sin a \approx a$.

Уравнение (5.7) для гармонического движения имеет следующее решение:

$$T = 2p\sqrt{\frac{l}{g}\frac{m_г}{m_и}}. \qquad (5.8)$$

Так как из опытов Ньютона следовало, что период колебаний математического маятника подчиняется закону (5.6), то это означало, что отношение $\frac{m_г}{m_и}$ равно 1.

Опыты Ньютона с большой точностью показали, что g одинаково для всех тел в данном месте Земли. Одновременно мы получили непосредственное подтверждение совпадения инертной и гравитационной масс у всех тел (независимо от местонахождения на Земле).

Еще более точный метод доказательства численного совпадения гравитационной и инертной масс был разработан венгерским физиком Этвешем (1848-1919). В 1896 г. он показал, что эти величины могут отличаются друг от друга на величину порядка 10^{-9}. В 1959-1963 гг. американским физиком Р. Дике точность измерений была увеличена до 10^{-11}, а в 1971 г. советские физики В.П. Брагинский и В.И. Панов довели точность измерения этих величин до 10^{-12}. Идея последних экспериментов принципиально была одинакова, а различались они лишь точностью, которую давали приборы наблюдения.

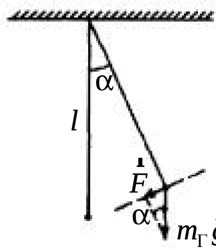

Рис.4.

Опишем принципиальную схему последних опытов. Рассматривая тело, находящееся на поверхности Земли, мы не учитывали до сих пор вращение Земли вокруг своей оси. Рассматривая опыт в системе отсчета “Земля”, мы должны учесть помимо силы тяжести , направленной к центру Земли и равной $F_г = G \cdot m_г M_з / R^2$, еще центробежную силу $F_{цб} = m_и w^2 r_\perp$, направленную по перпендикуляру к оси вращения Земли. Если тело не находится на экваторе, то эти две силы не действуют по одной прямой (см. рис.5). Важно отметить, что сила тяготения пропорциональна гравитационной массе $m_г$, в то время как центробежная сила пропорциональна инертной массе $m_и$. Поэтому, если отношение $m_г / m_и$ для разных тел различно, то равнодействующая $F_г$ и $F_{цб}$ для разных тел будет иметь разное направление.

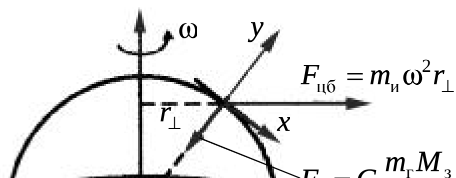

Рис. 5.

В опыте Этвеша (см. рис.6) на длинной тонкой нити подвешивался стержень, к концам которого прикреплялись грузы 1 и 2, изготовленные из различных материалов. Стержень устанав-

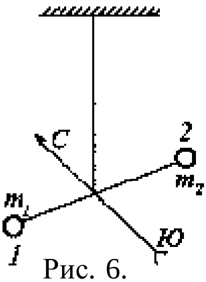

Рис. 6.

ливался перпендикулярно к меридиану данного места, где проводился эксперимент. На каждый груз действуют две силы: гравитационная $m_г.g$ и центробежная сила $m_и w^2 r_\perp$. Последняя имеет вертикальную составляющую $m_и w^2 r_\perp \cos n$, где ν - географическая широта рассматриваемого места.

Если место прикрепления нити к стержню делит его пополам, то одним из условий равновесия грузов 1 и 2 будет равенство:

$$m_{1г}g - m_{1и}w^2 r_\perp \cos n = m_{2г}g - m_{2и}w^2 r_\perp \cos n$$

или

$$m_{1и}\left(a_1 g - w^2 r_\perp \cos n\right) = m_{2и}\left(a_2 g - w^2 r_\perp \cos n\right), \qquad (5.9)$$

где α_1 и α_2 - отношения гравитационных масс к инертным для грузов 1 и 2 соответственно.

Если $a_1 \neq a_2$, то из выражения (5.9) следовало бы, что $m_{1и} \neq m_{2и}$. В этом случае центробежные силы, действующие на грузы, а с ними и их горизонтальные составляющие, направленные к югу, не были бы одинаковыми. Поэтому появился бы вращающий момент, стремящийся закрутить нить:

$$M_l = \left(m_{1и} - m_{2и}\right)\frac{l}{2}w^2 r_\perp \sin n \,, \qquad (5.10)$$

где l - длина стержня.

В состоянии равновесия угол закручивания

$$j_l = \frac{M_l}{f}\,,$$

где f - модуль кручения.

При развороте всей установки на 180^0 угол поворота и крутящий момент M_2 изменят знак. Этвеш обнаружил, что с точностью до 10^{-9} $\left(j_1 - j_2\right) = 0$, что свидетельствовало о численном совпадении инертной и гравитационной масс каждого тела 1 и 2.

Чтобы не поворачивать установку на 180^0, в последующих экспериментах по методу Этвеша использовали суточное вращение Земли. Тогда без механического поворота установки последняя по отношению к направлению на Солнце через 12 часов оказывалась повернутой на нужный угол. И несмотря на то, что сила притяжения грузов 1 и 2 к Солнцу меньше земной в тысячи раз, но при неравенстве $m_г$ и $m_и$ приборы зафиксировали бы периодическое (с периодом в 12 ч) закручивание нити то в одну, то в другую сторону.

Тождество инертной и гравитационной масс приводит к глубоко идущему следствию. Этот факт был положен Эйнштейном в основу ОТО, его часто называют принципом эквивалентности инертной и гравитационной масс. Теория Эйнштейна оказалась бы неверной, если бы было обнаружено мельчайшее нарушение этого принципа. Вот почему повышение и без того исключительной точности проверки количественного совпадения $m_г$ и $m_н$ имеет принципиальное значение для утверждения ОТО.

Подведем итог. *Если в классической физике совпадение инертной и гравитационной масс тела считалось естественным, то на этот факт иначе посмотрел Эйнштейн. Из их равенства (эквивалентности) А. Эйнштейн сделал глубокий вывод: так как инертная масса определяет инертные, а гравитационная – гравитацион ные свойства тел, то эти физические явления (инерция и тяготение) являются лишь разными проявлениями одного и того же свойства физического тела. Это предположение (гипотезу) А. Эйнштейн и положил в основу построения так называемой общей теории относительности. Именно этой гипотезе обычно приписывают название "принципа эквивалентности".*

§6. Принцип эквивалентности

В §5 был сформулирован вывод о том, что совпадение инертной и гравитационной масс не случайно, а имеет принципиальное значение. Это утверждение А. Эйнштейн принял как закон природы: между явлениями инерции и тяготения нет разницы, они эквивалентные проявления единой физической сущности. Это утверждение, парадоксальное с классической точки зрения, столь важно, что мы посвятим анализу этого утверждения А. Эйнштейна отдельный очерк.

В кратком изложении основ СТО (§2) было показано, что эта теория отвергла всякую возможность обнаружить абсолютный покой или равномерное прямолинейное движение системы отсчета (лаборатории), наблюдая внутри ее какое-либо физическое явление. В ИСО пространство однородно и изотропно (все точки его и все направления в нем равноправны), а время течет равномерно, любой момент времени можно принять за начало отсчета времени. Эти свойства пространства и времени в СТО обусловлены тем, что в СТО не учитывается существование гравитационного поля, не рассматриваются явления в неинерциальных системах отсчета (НСО).

Естественно возникает вопрос: нельзя ли обнаружить ускоренное движение СО (физической лаборатории) с помощью наблюдения явлений, происходящих внутри НСО? Если это удастся сделать, то мы разрешим проблему об установлении абсолютного покоя и движения и тем самым утвердим взгляды И. Ньютона на существование абсолютного пространства и времени (см.§ 2).

а) *Поступательно и ускоренно движущаяся система отсчета.*

Для решения поставленной задачи рассмотрим следующую ситуацию. Пусть “Лаборатория” (т.е. СО) находится так далеко от всех тяготеющих тел, что все предметы в “Лаборатории” невесомы, нет ориентирующих понятий как “верх” и “низ”. Все вещественные предметы будут висеть неподвижно (относительно стенок лаборатории), либо будут двигаться равномерно и прямолинейно будучи предоставленными самим себе. Теперь изменим условия эксперимента, придав лаборатории ускоренное движение с ускорением в направлении оси ОХ (рис.7). Незакрепленные тела приобретут относительно лаборатории ускорение, направленное против движения СО. Закрепленные же тела (с помощью пружин или нитей) вызовут натяжение пружин или нитей.

Для математического описания рассматриваемого эксперимента воспользуемся классическими формулами преобразования координат и времени Галилея (учитывая при этом ускоренное движение подвижной СО, координаты которой обозначены со штрихами (см.рис.7)). Нам известны следующие формулы преобразования координат и времени классической физики - формулы Галилея (см.формулы 2.2):

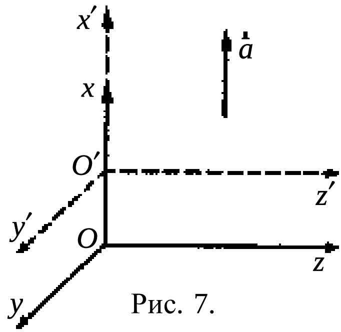

Рис. 7.

$$x' = x - 00'; \quad y'=y; \; z'=z; \quad t'=t, \qquad (6.1)$$

где при ускоренном движении штрихованной СО $OO' = at^2/2$.

Для нашей задачи эти формулы можно записать так:

$$x' = x - \frac{at^2}{2}; \; y'=y; \; z'=z; \; t'=t. \qquad (6.2)$$

Проверим, будет ли в этом эксперименте выполняться 2-ой закон классической механики, будет ли он инвариантен (т.е. будет ли он иметь один и тот же вид во всех СО). Для этого составим выражение, связывающее ускорение тела в 2-х СО (напомним, что в ИСО ускорение - инвариант, т.е. во всех ИСО имеет одно и то же значение). Составим сначала первые производные от формул (6.2), получим:

$$u'_{x'} = u_x - at, \qquad u'_{y'} = u_y, \qquad u'_{z'} = u_z.$$

Второе дифференцирование дает:

$$W'_{x'} = W_x - a; \qquad W'_{y'} = W_y; \qquad W'_{z'} = W_z.$$

Запишем эти три соотношения в единой векторной форме:

$$\vec{W}' = \vec{W} - \vec{a}. \qquad (6.3)$$

Мы обнаруживаем, что ускорение в нашей задаче не является абсолютной, инвариантной величиной: если в СО “*L*” ускорение равно нулю $W=0$, то в СО “*L*’” оно отлично от нуля и совпадает с ускорением СО “*L’* ”, взятым со знаком “—”: . Такой результат указывает на то, что в ускоренно движущейся СО (неинерциальной СО) “*L’* ” второй закон механики Ньютона не выполняется: если в СО “L” справедливо равенство:

$$\vec{F} = m\vec{W}, \tag{6.4}$$

то для СО “L' ” мы должны написать равенство:

$$\vec{F} = mW' + m\vec{a} \cdot \tag{6.5}$$

где использованы соотношения (6.3) и (6.4).

Оказывается, что нарушается не только 2-ой закон Ньютона, но и закон инерции. Действительно, если в ИСО “L” сила $\vec{F} = 0$, то и ускорение $W=0$ (тело или покоится, или движется равномерно и прямолинейно), то в НСО “L' ” дело обстоит иначе: при $\vec{F} = 0$ ускорение $\vec{W}' = -\vec{a}$ (см.6.5). Именно в связи с невыполнением в ускоренно движущихся СО закона инерции такие СО получили название неинерциальных СО (НСО).

Уравнению движения (6.5) можно придать “ньютоновский” вид, если наряду с “ньютоновской” силой $\vec{F}$, обусловленной взаимодействием реальных, конкретных тел, ввести так называемую “силу инерции”, равную в нашем случае $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$.

Уравнение (6.5) запишется так:

$$\vec{F} + \overline{F}_{ин} = m\vec{W}' \tag{6.6}$$

Выражение (6.6) имеет вид обычной формулы 2-го закона Ньютона. Однако, это удалось сделать путем введения “силы инерции”, природа которой была необъяснима в рамках классической механики. Именно поэтому такие силы в этой механике называли “фиктивными”. Ниже мы узнаем, что ничего фиктивного в этих силах нет. Но для этого нужно встать на точку зрения А. Эйнштейна. Но еще не зная рассуждений А. Эйнштейна, мы можем признать за силами инерции реальность, если вспомним, к каким физическим последствиям приводит проявление этих сил, например, для пассажиров при резкой остановке транспорта...

Выше мы поставили вопрос: нельзя ли, наблюдая физические процессы в НСО, установить, движется СО или покоится. Полученный выше результат о появлении в НСО сил инерции как будто бы дает утвердительный ответ на поставленный вопрос.

Но воспроизведем рассуждения А.Эйнштейна, рассмотрев предложенный им мысленный эксперимент с лифтом (в литературе этот лифт часто называют “лифтом Эйнштейна”). Сейчас, в XXI в., этот эксперимент уже можно осуществить, используя космические ракеты. Но 90 лет назад, когда А.Эйнштейн создавал свою теорию, космические корабли еще не летали в околоземном пространстве...

Итак, пусть лифт находится на Земле. Все предметы в нем весомы, подвешенные на нитях или пружинах, они растягивают их, однозначно определяются направления “верх” и “низ”. При этом, в силу малых размеров лифта, гравитационное поле в месте его нахождения можно считать однородным (во всем объеме лифта ускорение свободного падения во всех точках одно и то же).

Но рассмотрим тот же лифт вдали от Земли и других небесных тел (в этом и состоит “идеальность” эксперимента на момент создания ОТО в начале XX в), тогда можно считать, что гравитационное поле вокруг (и внутри) лифта отсутствует. Приведем лифт в ускоренное движение с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$. Очевидно, что этим мы создадим “весомость” всех тел в кабине лифта, растянутся нити или пружины, можно указать направление “верха” и “низа”. Т.е. все будет происходить так же, как тогда, когда лифт стоял на Земле. Вслед за Эйнштейном мы обнаруживаем одинаковость, эквивалентность физических состояний в однородном гравитационном поле в неподвижном лифте (на Земле) с состояниями в лифте, когда он находится вне гравитационного поля, но движется ускоренно с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$.

Это утверждение: неразличимость физических состояний в ИСО, находящейся в однородном гравитационном поле, от состояний вне поля при ускоренном движении СО с ускорением, равным ускорению, создаваемому однородным гравитационным полем, А. Эйнштейн возвел в ранг принципа - принципа эквивалентности и положил его в основу новой физической теории, получившей название общей теории относительности (ОТО).

Как и в специальной теории относительности ***принцип относительности*** имеет две формулировки (“утвердительную” и “отрицательную”), так и ***принцип эквивалентности*** можно сформулировать двояко:

1. Все физические процессы (явления) протекают одинаково при одинаковых условиях в ИСО, находящейся в однородном постоянном гравитационном поле, и в НСО, движущейся поступательно с определенным ускорением при отсутствии гравитационного поля (постоянное ускорение НСО равно тому ускорению, какое сообщает телам гравитационное поле в ИСО).

2. Никакие физические эксперименты, проводимые внутри СО, не позволяют отличить случай, когда “Лаборатория” движется поступательно с постоянным ускорением и гравитационное поле отсутствует, от случая, когда “Лаборатория” находится в покое (или движется равномерно и прямолинейно) в постоянном и однородном гравитационном поле.

Рассмотренный мысленный эксперимент приводит к чрезвычайно интересному и важному (для нашей строящейся теории) выводу о возможности создания искусственного гравитационного поля, приводя СО в ускоренное движение. И наоборот, заставляя СО “падать” в реальном однородном гравитационном поле с ускорением, которое сообщает это поле свободно падающим телам, можно “уничтожить” это гравитационное поле в объеме СО (“Лаборатории”).

Обратим внимание читателя на неоднократно повторяемые слова “в однородном постоянном гравитационном поле”. Дело в том, что только в этом случае можно говорить о постоянном ускорении, которое это поле может сообщить свободным телам. При этом тело может не быть материальной точкой, а занимать в этом поле конечный объем. Впоследствии мы вернемся к этой детали в формулировке принципа эквивалентности, т.к. она укажет нам границы применимости не только принципа эквивалентности, но и всей так называемой общей теории относительности.

Опираясь на принцип эквивалентности, мы можем сделать еще одно принципиально важное обобщение. Речь идет о движении по инерции: всякое тело, которое не испытывает воздействия других тел, движется в данной СО равномерно и прямолинейно или покоится. В механике Ньютона движение по инерции принципиально отличалось от движения в поле тяжести. Но на основании принципа эквивалентности можно утверждать, что, переходя к ускоренно движущейся СО, мы можем “превращать” состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения в ускоренное, которое уже невозможно отличить от движения в поле тяжести. Справедливо и обратное утверждение: если гравитационное поле постоянно и однородно (что справедливо для небольших его объемов), то движение тел в свободно падающей СО неотличимо от движения по инерции. У нас, современников освоения Космоса, имеющих возможность наблюдать с помощью телевидения свободное состояние космонавтов и незакрепленных тел в кабине космического корабля, сделанное утверждение не должно вызывать возражения: мы видим на экране телевизора, что и космонавты и не закрепленные в кабине тела или неподвижны, или, получив толчок от руки космонавта или стенок кабины, перемещаются равномерно и прямолинейно в пределах объема корабля. Такое состояние предметов в кабине космического корабля мы объясняем так: космический корабль и все тела в нем, двигаясь вперед, непрерывно падают на Землю, это движение есть свободное падение. Но из-за шарообразности Земли при определенной скорости движения корабля он может продолжительное время обращаться вокруг Земли. Снова отметим, что объем корабля должен быть таким, чтобы во всех его точках можно было бы считать, что ускорение свободного падения одинаково.

На основании предыдущих рассуждений можно обобщить понятие “инерциальное движение”: тело, на которое не действуют внешние силы (или равнодействующая их равна нулю) или которое подвержено действию только гравитационных сил, совершает движение по инерции.

Поставим перед читателем еще одну проблему: если, выбирая ускорение НСО, можно увеличить, или уменьшить, или даже “уничтожить” гравитационное поле, то почему же тела все равно

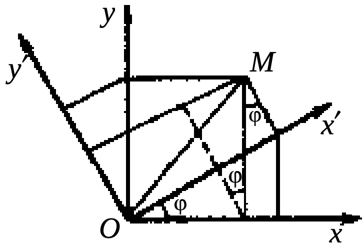

Рис. 8.

продолжают притягиваться друг к другу (имеется в виду последний случай движения НСО)?

Но прежде, чем дать ответ на этот неожиданный, но очень важный для нашей теории вопрос, сделаем дальнейшее обобщение принципа эквивалентности, рассмотрев другой класс НСО - вращающиеся СО.

б) *Вращающаяся система отсчета.*

Для упрощения задачи рассмотрим частный случай. Пусть НСО *“L’”* вращается вокруг оси $0z$ инерциальной СО *“L”* с угловой скоростью ω (рис.8). Формулы перехода от не штрихованных к штрихованным координатам имеют вид (нерелятивистский случай):

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi;$$
$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi; \qquad (6.7)$$
$$z' = z; \; t' = t; \;\; \varphi = \omega t.$$

Нам потребуются и обращенные формулы:

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t;$$
$$y = y'\cos\omega t + x'\sin\omega t; \qquad (6.8)$$
$$z = z', \qquad t = t'.$$

Для составления уравнений движения необходимо найти проекции ускорения. Продифференцируем формулы (6.8) по времени дважды:

$$
\begin{aligned}
&W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\cos wt - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin wt - 2w\left[\frac{dx'}{dt}\sin wt + \frac{dy'}{dt}\cos wt\right] - \\
&-w^2\left[x'\cos wt - y'\sin wt\right]; \\
&W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}\cos wt + \frac{d^2x'}{dt^2}\sin wt - 2w\left[\frac{dy'}{dt}\sin wt - \frac{dx'}{dt}\cos wt\right] - \\
&-w^2\left[y'\cos wt - x'\sin wt\right]; \\
&W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}.
\end{aligned}
\qquad (6.9)
$$

По закону, выраженному формулами (6.8), будут изменяться и компоненты силы F:

$$
\begin{aligned}
&F_x = F'_{x'}\cos wt - F'_{y'}\sin wt, \\
&F_y = F'_{y'}\cos wt - F'_{x'}\sin wt, \\
&F_z = F'_{z'}.
\end{aligned}
\qquad (6.10)
$$

В ИСО *“L”* справедлив 2-ой закон Ньютона, поэтому можно составить следующие проекции формулы этого закона:

$$
F_X = mW_X\ ;\ F_Y = mW_Y\ ;\ F_Z = mW_Z\ . \qquad (6.11)
$$

В НСО *“L’ ”* уравнение движения в проекциях на оси координат запишется так:

$$
F'_{x'}\cos wt - F'_{y'}\sin wt = m\begin{bmatrix} W'_{x'}\cos wt - W'_{y'}\sin wt - 2w\left(v'_{x'}\sin wt + v'_{y'}\cos wt\right) - \\ -w^2\left(x'\cos wt - y'\sin wt\right) \end{bmatrix};
$$

$$
(6.12)
$$

$$
F'_{y'}\cos wt - F'_{x'}\sin wt = m\begin{bmatrix} W'_{t'}\cos wt + W'_{x'}\sin wt - 2w\left(v'_{y'}\sin wt - v'_{x'}\cos wt\right) - \\ -w^2\left(y'\cos wt + x'\sin wt\right) \end{bmatrix};
$$

$$
F'_{z'} = mW'_{z'}.
$$

Решая совместно эту систему уравнений, можно получить более компактную форму записи проекций уравнения движения в СО *“L’ ”* (предоставляем эту операцию осуществить читателю самостоятельно):

$$F'_{x'} = mW'_{x'} - 2m\omega v'_{y'} - m\omega^2 x';$$
$$F'_{y'} = mW'_{y'} + 2m\omega v'_{x'} - m\omega^2 y';\qquad (6.13)$$
$$F'_{z'} = mW'_{z'}.$$

или в векторной записи закон движения принимает вид:

$$\vec{F}' = m\vec{W}' - m\omega^2\vec{r} - 2m[\vec{v}'\vec{\omega}],\qquad (6.14)$$

где $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости, направленный вдоль оси *0z'*, $[\vec{v}'\vec{\omega}]$-краткая запись так называемого векторного произведения, в нашем случае вращения вокруг оси *0z'*оно равно

$$[\vec{v}'\vec{\omega}] = \vec{i}\,v'_{y'}\omega_{z'} - \vec{j}\,v'_{x'}\omega_{z'}\,, \quad \omega_{z'} = \omega.$$

В частном случае, когда *F' = 0*, получаем:

$$\vec{W}' = \omega^2\vec{r} + 2[\vec{v}'\vec{\omega}].\qquad (6.15)$$

Первое слагаемое носит название центробежного ускорения (оно направлено по радиусу от оси вращения). Во вращающейся СО центробежное ускорение отлично от нуля независимо от того, покоится или движется тело в этой НСО.

Иначе изменяется второе слагаемое, оно отлично от нуля во вращающейся СО только в том случае, если тело движется в этой СО, но не параллельно оси вращения (иначе векторное произведение =0, даже при $\vec{v}' \neq 0$ и $\vec{\omega} \neq 0$, т.к. $sin(\vec{v}\vec{\omega}) = 0$). Эта составляющая ускорения *W'* получила название “кориолисово ускорение” в честь ученого, который ввел это ускорение.

Таким образом, во вращающейся СО “*L'* ” ускорение создается совместным действием “ньютоновской”, “центробежной” и “кориолисовой” сил:

$$\vec{F} + \vec{F}_{цб} + F_k = mW'\qquad (6.16)$$

Важно отметить, что все упомянутые силы пропорциональны массам тел, а потому они сообщают всем телам одно и то же ускорение. С нашей точки зрения, они подобны гравитационным силам, которые также сообщают всем телам одно и то же ускорение (конечно, в каждом случае свое), независимо от величин масс тел (мы знаем, что гравитационное поле сообщает постоянное ускорение только в том случае, если оно однородно и постоянно, или мы рассматриваем поле в малом объеме).

Полученный результат можно сформулировать так: во вращающейся СО возникают “гравитационные поля” двух типов, обусловленные вращением этой НСО. Эти “гравитационные поля” по-разному направлены и по-разному изменяются во вращающейся СО. “Центробежное гравитационное поле” направлено по радиусу вращения от оси вращения и возрастает с увеличением $\vec{r}$, это поле неоднородно. “Кориолисово гравитационное поле” действует только на движущиеся в НСО тела и определяется не положением в пространстве, а скоростью движения тела (и угловой скоростью вращения НСО), его направление зависит и от направления скорости движения тела $\vec{v}'$, и от направления вектора угловой скорости $\vec{w}$.

Мы рассмотрели проявление “гравитационных полей” при поступательном и вращательном движениях НСО, но любое сложное движение тела всегда можно представить в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений. Поэтому произвольное движение НСО можно сопоставить с эквивалентными (в общем случае переменными) гравитационными полями.

В связи с этими рассуждениями принцип эквивалентности можно обобщить так:

описание физических явлений в произвольно движущейся СО при отсутствии гравитационного поля ЭКВИВАЛЕНТНО описанию их в ИСО, находящейся в некотором общем случае переменном и неоднородном гравитационном поле.

§7. Геометрия и гравитация

Повторим еще раз вывод, к которому мы пришли в предыдущем параграфе, установив эквивалентность состояний в ускоренно движущейся СО при отсутствии поля тяготения и в ИСО при наличии поля тяготения. В общем случае и ускоренное движение может быть произвольным, соответственно и гравитационное поле может быть сложной конфигурации.

Принцип эквивалентности утверждает: *описание явлений в произвольно движущейся СО эквивалентно описанию явлений в ИСО, находящейся в некотором гравитационном поле.*

Но что мы понимаем под словами “эквивалентное описание”?

В классической механике это означало, что законы механики одинаковы во всех ИСО. Другими словами, используя формулы преобразования координат и времени Галилея, убеждаемся, что 2-ой закон Ньютона инвариантен, т.е. имеет один и тот же вид во всех ИСО (это и означает, что законы механики одинаковы во всех ИСО).

Аналогично в специальной теории относительности во всех ИСО действуют одинаковые законы природы и их математическая запись одинакова во всех ИСО, при этом при переходе от одной ИСО к другой используются уже не формулы Галилея, а формулы преобразования координат и времени СТО - формулы Лоренца.

Следуя явно проявляющейся логике в приведенных рассуждениях, мы установим эквивалентность описаний в произвольно ускоренно движущейся СО (при отсутствии гравитационного поля) и в соответствующем (в общем случае неоднородном и непостоянном) гравитационном поле в ИСО, если найдем формулы преобразования координат и времени при переходе от первой СО ко второй. Если законы природы окажутся одинаковыми при использовании найденных формул преобразования координат и времени (т.е. формулы законов будут иметь один и тот же вид в результате проведенных преобразований), то говорят об инвариантности законов по отношению к этим формулам преобразования. Запишем предполагаемые формулы преобразования координат ($x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$) и времени ($t=x_4$) в следующей неявной форме:

$$\begin{aligned} x_1&=f_1(x,y,z,t),\\ x_2&=f_2(x,y,z,t),\\ x_3&=f_3(x,y,z,t),\\ x_4&=f_4(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Для полного решения задачи необходимо установить явный вид функций f_1, f_2, f_3, f_4. Однако мы изберем другой путь для достижения цели. Для этого познакомимся с некоторыми особенностями геометрии в разных координатных системах.

Декартова система координат на плоскости.

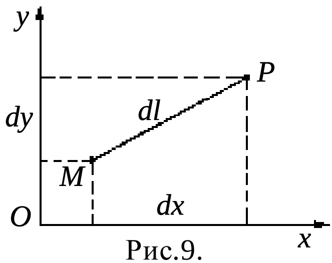

Рис.9.

Начнем с геометрии на плоскости. В декартовых координатах квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками определяется по формуле

$$dl^2=dx^2+dy^2, \tag{7.2}$$

т.е. квадрат дифференциала расстояния между двумя бесконечно близкими точками (рис.9) выражается в виде суммы квадратов дифференциалов координат dx и dy с *постоянными* коэффициентами, равными единице (обратим внимание на данное определение, т.к. оно будет определяющим для установления в последующем класса геометрии). Легко видеть, что другие координаты, например, полярные (рис.10) этим свойством не обладают:

Полярная система координат на плоскости

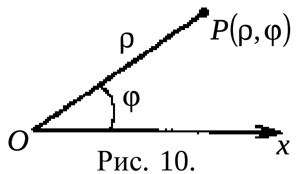

Рис. 10.

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 , \tag{7.3}$$

где r - расстояние от начала координат до точки наблюдения $P(r,\varphi)$, φ - угол между направлением на избранную точку P и ранее выбранной оси $0x$. Коэффициент при втором слагаемом в (7.2) оказывается переменным.

Однако в случае геометрии на плоскости всегда можно перейти от полярных или других координат к декартовой системе координат и тем самым добиться, чтобы квадрат элемента длины dl^2 выражался в виде суммы квадратов дифференциалов координат с постоянными коэффициентами.

Глубокая причина этого утверждения заключается в том, что в случае геометрии на плоскости мы имеем дело с “плоским многообразием” (с “плоским” пространством), в котором справедливы законы геометрии Евклида (справедливо и обратное утверждение: если выполняются постулаты Евклида, то такое пространство является “плоским”). В частности, сумма углов любого треугольника на плоскости равна 180^0, и для любого прямоугольного треугольника справедлива теорема Пифагора.

Обратимся теперь к рассмотрению трехмерного пространства. В декартовых координатах квадрат расстояния между двумя близкими точками также выражается суммой квадратов дифференциалов координат x, y, z с постоянными коэффициентами, равными единице:

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{7.4}$$

Этим свойством не обладают криволинейные координаты, например, цилиндрические или сферические (рис.11 и 12):

$$dl^2=dr^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2 \tag{7.5}$$

и

$$dl^2=dr^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2+r^2 d\theta^2\,. \tag{7.6}$$

Однако как и в случае геометрии на плоскости, мы всегда можем вернуться от криволинейных координат к декартовым и привести тем самым выражение dl^2 к сумме квадратов дифференциалов координат с единичными коэффициентами.

Ясно, что такая возможность обусловлена тем, что в рассматриваемом трехмерном пространстве (говорят о “многообразии”) справедлива геометрия Евклида. Такое многообразие (пространство) принято называть “плоским” (по аналогии с двухмерным “плоским” евклидовым пространством). Этим эпитетом отмечается лишь то, что и в трехмерном пространстве справедлива геометрия Евклида.

Совершенно иное положение мы обнаруживаем в случае “кривых” пространств (многообразий), в которых законы геометрии Евклида *неверны*. В качестве иллюстрации такого “кривого” многообразия рассмотрим геометрию на *поверхности сферы*. То, что поверхность “кривая”, не вызывает сомнения, она двухмерная, кратчайшее расстояние между точками на поверхности сферы измеряется отрезком дуги большого круга, которая является аналогом прямой в “плоском” (евклидовом) пространстве.

На рис.13 показано, что в сферическом треугольнике, сторонами которого являются отрезки дуг большого круга, сумма углов не равна 180^0. Например, в сферическом треугольнике, образованном дугой экватора и двумя меридианами, сходящимися в полюсе под прямым углом друг к другу, сумма углов равна 270^0. Очевидно, что для “кривой” поверхности сферы теорема Пифагора, да и некоторые другие положения плоской геометрии непригодны. Так, квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками равен:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 sin^2 \theta \, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

и никаким преобразованием координат это выражение не свести к (7.4).

Геометрия, как наука о свойствах реального пространства, является в основе своей наукой опытной. Аксиомы и постулаты геометрии не являются изначальными истинами, врожденными представлениями человеческого разума, а являются обобщением многовекового опыта. Это понимал знаменитый российский математик начала XIXв. Н. Лобачевский, когда, построив первую в истории математики неевклидову геометрию, пы-

Цилиндрическая система координат в пространстве

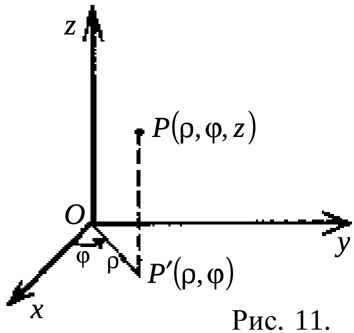

Рис. 11.

Сферическая система координат в пространстве

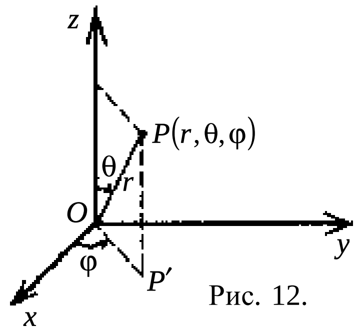

Рис. 12.

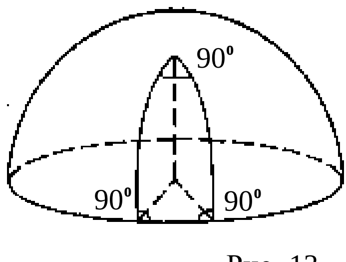

Рис. 13.

тался проверить опытным путем, равна ли сумма углов треугольника в его геометрии 180^0. К сожалению, опыты Лобачевского окончились неудачно, да они и не могли окончиться иначе, так как в околоземном пространстве отступления от геометрии Евклида слишком малы, чтобы могли быть обнаружены техникой (приборами) начала XIX в. Поэтому до создания А. Эйнштейном общей теории относительности не возникало серьезных сомнений во всеобщей справедливости законов геометрии Евклида. Тем более, что опыт геодезии, топографии, астрономии, архитектуры и т.д. свидетельствовал о "правильности" этой геометрии.

Для продолжения поиска "истинной" геометрии мира, вспомним, что уже в специальной теории относительности пространство и время объединяются в единое четырехмерное многообразие, в котором роль расстояния между двумя бесконечно близкими мировыми точками определяется дифференциалом интервала:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 . \qquad (7.7)$$

Из выражения (7.7) следует, что квадрат четырехмерного элементарного "расстояния" - интервала представляется в виде алгебраической суммы квадратов дифференциалов координат x,y,z с постоянными коэффициентами, равными единице, и квадрату дифференциала времени с коэффициентом, отличным от единицы и равным $(-c^2)$, где c - скорость света в вакууме. Выражение (7.7) инвариантно, т.е. имеет один и тот же вид и числовое значение, если для перевода от одной ИСО к другой ИСО воспользоваться формулами преобразования координат и времени Лоренца (см. §2,часть2). Но так как коэффициент у дифференциала времени отличен от единицы, хотя и постоянен, говорят, что геометрия четырехмерного пространства-времени в СТО уже не является евклидовой и ее обычно называют "псевдоевклидовой" (почти евклидовой).

Если вместо пространственных координат (декартовых координат x,y,z) ввести криволинейные (цилиндрические, сферические и др.) координаты, то изменится выражение пространственной части дифференциала интервала, но последнее слагаемое в (7.7) по-прежнему будет входить с тем же коэффициентом ($-c^2$).

Если же перейти к произвольной ускоренно движущейся СО, то правая сторона формулы (7.7) изменится существенно. Например, рассмотрим переход к СО, которая движется равномерно ускоренно вдоль оси *0x*.

В *нерелятивистском* случае формулы преобразования координат и времени запишутся так:

$$x = x' + OO' = x' + \frac{at^2}{2};\quad y = y';\quad z = z';\quad t = t'.$$

Составим дифференциалы координат и времени:

$$dx = dx' + atdt;\quad dy = dy';\quad dz = dz';\quad dt = dt'.$$

Преобразуем правую сторону (7.7),используя эти приращения:

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz^2 + 2a.t'dx'.dt' - (c^2 - a^2.t'^2)dt'^2 \qquad (7.8)$$

Рассмотрим теперь равномерно вращающуюся СО, формулы преобразования координат и времени при переходе к “неподвижной” СО от вращающейся имеют вид:

$$x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t';\quad y = y'\cos\omega t' + x'\sin\omega t';\quad z = z';\quad t = t'.$$

Как и в предыдущем случае, составляем дифференциалы координат и времени:

$$dx = dx'\cos\omega t' - dy'\sin\omega t' - \omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t').dt';$$

$$dy = dy'\cos\omega t' + dx'\sin\omega t' + \omega(x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t').dt';$$

$$dz = dz';\quad dt = dt'.$$

Преобразуем правую часть формулы (7.7),используя последние равенства; квадрат приращения интервала принимает вид:

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + [\omega^2(x'^2 + y'^2) - c^2]dt'^2 - 2\omega\, y'dx'dt' + $$
$$+ 2\omega\, x'dy'dt' \qquad (7.9)$$

Таким образом, в ускоренно движущихся СО квадрат приращения интервала содержит не только квадраты дифференциалов координат и времени, но и произведения дифференциалов разных координат, причем коэффициенты этой квадратичной формы в общем случае являются переменными величинами, к тому же коэффициенты у членов, содержащих смешанные произведения дифференциалов координат и времени, никогда не могут равняться 1 или 0 (они же содержат линейное ускорение $\vec{a}$ или угловую скорость ω, и только при переходе к ИСО эти члены исчезают, но нас сейчас интересуют ускоренно движущиеся СО, для которых $\vec{a} \neq 0$ и $w \neq 0$).

Мы рассмотрели два частных случая движения ускоренно движущейся СО. Полученный результат естественно обобщается на произвольно движущиеся СО. Но для этого целесообразно ввести новые координаты, определяемые формулами (7.1).Тогда квадрат приращения интервала в общем случае с помощью переменных x_1, x_2, x_3, x_4 запишется так:

$$\begin{aligned} dS^2 = {} & g_{11}(x_1...x_4)\,dx_1^2 + g_{22}(x_1...x_4)\,dx_2^2 + g_{33}(x_1...x_4)\,dx_3^2 + \\ & + g_{44}(x_1...x_4)\,dx_4^2 + \\ & + 2g_{12}(x_1...x_4)\,dx_1dx_2 + 2g_{13}(x_1...x_4)\,dx_1dx_3 + \\ & + 2g_{14}(x_1...x_4)\,dx_1dx_4 + 2g_{23}(x_1...x_4)\,dx_2dx_3 + \\ & + 2g_{24}(x_1...x_4)\,dx_2dx_4 + 2g_{34}(x_1...x_4)\,dx_3dx_4\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Полученные выше формулы (7.7), (7.8) и (7.9) являются частными случаями формулы (7.10). В более компактной форме выражение (7.10) запишется так:

$$dS^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot dx_i dx_k. \tag{7.11}$$

Совокупность величин g_{ik} образует так называемый метрический тензор, смысл этого названия будет раскрыт ниже. Обратим внимание на то, что коэффициенты g_{ik} симметричны, т.е., в силу равноценности индексов:

$$g_{ik}\ (x_1,x_2,x_3,x_4) = g_{ki}(x_1,x_2,x_3,x_4), \tag{7.12}$$

и поэтому существует лишь 10 различных компонент g_{ik}:

$$g_{11},\ g_{22},\ g_{33},\ g_{44},\ g_{12},\ g_{13},\ g_{14},\ g_{23},\ g_{24},\ g_{34}.$$

При переходе от одной СО к другой компоненты метрического тензора g_{ik} естественно будут изменяться, но квадрат приращения интервала dS^2 будет оставаться неизменным в силу его инвариантности.

Повторим некоторые чрезвычайно важные положения, о которых мы уже говорили ранее. В отсутствии истинного гравитационного поля мы всегда можем перейти от неинерциальных координат x_1, x_2, x_3, x_4 (например, от вращающейся или равномерно ускоренно движущейся СО) к координатам ИСО. При таком переходе мы “освобождаемся” от инерционных гравитационных сил, как-то центробежных сил или сил Кориолиса во вращающейся СО, или сил инерции в равноускоренно движущейся СО. При этом выражение для квадрата приращения интервала dS^2 вновь примет вид (7.7), отличными от нуля будут лишь следующие компоненты метрического тензора: $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{44}=-c^2$, значения которых обычно называются “галилеевыми”, остальные же компоненты с несовпадающими индексами окажутся равными нулю. Таким образом, *в отсутствии истинного гравитационного поля геометрия пространства-времени является псевдоевклидовой, геометрией Минковского.*

Совершенно иная ситуация возникает в том случае, когда имеется истинное гравитационное поле. В этом случае никакое преобразование координат x_1, x_2, x_3, x_4 не приводит выражение (7.11) к “галилееву” виду и компоненты метрического тензора к “галилеевым” значениям (вспомним, о чем говорилось при рассмотрении геометрии поверхности сферы). Математически это следует из того, что в общем случае невозможно удовлетворить шести уравнениям:

$$g_{12}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\ ;\quad g_{23}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\ ;$$
$$g_{13}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\ ;\quad g_{24}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\ ;$$
$$g_{l4}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\ ;\quad g_{34}(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\ ;$$

путем преобразования четырех параметров x_1, x_2, x_3, x_4 (речь идет о тех компонентах, которые должны отсутствовать в (7.11)).

С физической точки зрения это следует из отличия между истинными и инерционными гравитационными полями: первые исчезают на больших расстояниях от источников этих полей, вторые же или остаются постоянными (при равноускоренном движении СО), или нарастают с удалением от оси вращения (об этом мы говорили в §6). Поэтому “уничтожить” гравитационное поле во всем пространстве никаким выбором СО невозможно. Поэтому только в малых областях пространства истинные гравитационные поля физически неотличимы от инерционных гравитационных полей (читатель должен был обратить внимание, что мы постоянно рассматриваем приращение квадрата интервала для бесконечно близких двух точек). Вот почему ранее мы неоднократно говорили о том, что принцип эквивалентности справедлив лишь в малом объеме, где можно пренебречь неоднородностью гравитационного поля.

Проследим некоторую закономерность в физических теориях, в основе которых лежат представления о свойствах пространства и времени.

В ньютоновской физике пространство и время рассматривались как вместилище вещей и событий, их независимые ни от чего длительности (ни от массы тел, ни от состояния этих тел), метрика пространства была евклидовой, "плоской".

В специальной теории относительности метрика единого, четырехмерного пространства-времени зависит от состояния тел, но влияние гравитационного поля не учитывается, взаимосвязь пространства со временем проявляется в том, что геометрия мира уже не является евклидовой, хотя и по - прежнему "плоской". В силу того, что квадрат приращения четырехмерного "расстояния" - интервала содержит член ($-c^2dt^2$) с коэффициентом, отличным от единицы (как у других слагаемых интервала), геометрия пространства-времени называется "псевдоевклидовой".

В ОТО мы установили, что геометрические свойства также четырехмерного (как в СТО) пространства-времени определяются плотностью материи (и вещественных тел и полей), создающей гравитационные поля, метрика пространства-времени является неэвклидовой (то, что и ход часов зависит от распределения материи, проявляется в том, что в выражении для приращения квадрата интервала у квадрата dx_4, коэффициент g_{44} сложным образом определяется всеми переменными x_1, x_2, x_3, x_4. Это означает, что ход времени неодинаков в разных точках мира). Если метрику пространства и времени классической физики мы назвали "плоской", то про метрику ОТО говорят, что она обладает "кривизной". Чтобы "представить" себе эту кривизну, воспользуемся следующей аналогией. Уменьшим число измерений пространства, как и раньше, когда мы рассматривали особенность геометрии сферы, ограничимся двухмерным пространством. Пусть на горизонтально расположенный обруч натягивается тонкая резиновая пленка. Нарисуем на верхней поверхности пленки сетку с квадратными ячейками - декартову сетку координат. На поверхности пленки справедлива геометрия Евклида: сумма углов треугольника равна 180^0, справедлива теорема Пифагора и другие законы "плоской" геометрии. Если вдоль поверхности пленки запустить очень легкий шарик, то (если пренебречь трением) он будет двигаться равномерно и прямолинейно, будут выполняться все законы классической механики. Поместим теперь на середину пленки достаточно тяжелый шар. Благодаря весу шара поверхность пленки деформируется и у нас возникнет искривленная двухмерная поверхность - кривое двухмерное многообразие. На ней законы геометрии Евклида уже не выполняются, и шарик, пущенный на искривленную пленку, будет скатываться ("притягиваться") к тяжелому шару. *Если движение легкого шарика вокруг тяжелого толковать как "тяготение" между этими двумя телами, то мы тотчас же обнаруживаем взаимосвязь между тяготением и кривизной пространства.* Конечно, представить себе "кривизну" трехмерного пространства, а тем более четырехмерного пространства-времени, невозможно. Поэтому приведенная аналогия лишь помогает нам обнаружить связь между кривизной пространства-времени и тяготением.

Итак, из предыдущего повествования можно сделать следующий вывод: поскольку гравитационное взаимодействие и изменение законов геометрии (отклонение их от евклидовых) возникает одновременно (совместно), компоненты метрического тензора g_{ik}, определяющие в общем случае квадрат приращения интервала (см.7.11), имеют двоякий физический смысл: они характеризуют законы геометрии (метрику) четырехмерного многообразия (четырехмерного пространства-времени), именно с этим связано название тензора - метрический тензор. С другой стороны, они связаны с гравитационным полем, с его интенсивностью (если гравитационное поле слабое - ньютоновское, то формула (7.11) переходит в (7.7)), поэтому величины g_{ik} нередко называют "гравитационными потенциалами". В теории гравитационного поля А. Эйнштейна величины g_{ik} играют такую же роль, как векторный и скалярный потенциалы $\vec{A}$ и φ в теории электромагнитного поля (см. Часть 1, §16). Потенциалы g_{ik} удовлетворяют дифференциальным уравнениям такого же типа, что и величины $\vec{A}$ и φ. В вакууме эти уравнения являются волновыми, из чего следует, что гравитационные действия передаются в пространстве-времени не мгновенно (как это считалось в ньютоновской механике), а с конечной скоростью, со скоростью света в вакууме. До сих пор все попытки обнаружить гравитационные волны не дали положительного результата (см. книгу Брагинского В.Б. и Полнарева А.Г. "Удивительная гравитация", Б-ка "Квант", выпуск 39,1985г.).

Данный параграф является центральным для построения ОТО, поэтому имеет смысл подвести итог полученным выше важным выводам, выразив их несколько иным образом.

Итак, мы знаем теперь, в чем принципиальное отличие СТО и ОТО: в СТО устанавливается инвариантность законов природы во всех ИСО, неизменность формул этих законов при переходе от одной ИСО к другой ИСО при помощи формул преобразования координат и времени Лоренца. Но при этом считается, что гравитационного поля нет, благодаря чему пространство обладает однородностью (все его точки равноценны) и изотропностью (все направления в пространстве равноправны) и время течет равномерно, оно однородно (все его моменты равноценны). В СТО устанавливается взаимосвязь пространства и времени (что выражено в формулах Лоренца (см. Часть 2, §2, формула (2.1)), поэтому вводится единое пространственно -временное многообразие - ***пространство-время***, заданием четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4 однозначно определяют положение события (мировой точки) в четырехмерном пространстве-времени. Физико-геометрические свойства четырехмерного многообразия пространства-времени в СТО содержатся в свойствах пространственно-временного интервала, приращение которого (его значение для двух бесконечно близких мировых точек) имеет вид (2.5)

$$dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2, \quad \text{где } x_4 = c.t \qquad (7.15)$$

Интервал (и его приращение) является абсолютной, инвариантной величиной относительно формул преобразования Лоренца.

ОТО - это следующий после СТО этап познания свойств пространства, времени и движения. В физическую картину мира включаются силы гравитации, обнаруживается эквивалентность описания физических процессов при наличии поля тяготения в ИСО и в отсутствии этого поля в НСО. Однако, эта эквивалентность носит локальный, местный характер, т.е. проявляется в небольшом геометрическом пространстве, в котором гравитационное поле можно считать постоянным и однородным. В общем случае переход от одной СО к другой производится с помощью более сложных формул, частными случаями которых являются формулы Галилея и Лоренца. Выше эти формулы были записаны в неявном виде - (7.1).

Как и в СТО, общей идеей является требование инвариантности физических законов при проведении преобраэований (7.1). Геометрические свойства пространства-времени выражаются через свойства обобщенного интервала, приращение которого дается формулой (7.11):

$$dS^2 = \sum_{a,b} g_{a,b} \cdot dx_a dx_b \,, \qquad (7.11)$$

где $g_{ab} = g_{ab}\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$ - некоторые функции координат точки пространства и момента времени, $\alpha, \beta = 1,2,3,4$ *(здесь изменены буквы индексов, что не существенно).*

Придавая индексам α и β значения от 1 до 4, получим совокупность 16 величин, которые можно расположить в прямоугольную таблицу по строкам и столбцам, в нашем случае эта прямоугольная таблица будет квадратной:

$$g_{a,b} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}. \qquad (7.16)$$

Таблица (7.16), составленная из метрических коэффициентов $g_{\alpha\beta}$, носит название метрического тензора 2-го ранга (по числу индексов у каждого элемента таблицы). Так как индексы равноценны, принимают одни и те же значения от 1 до 4, то тензор оказывается симметричным. Это означает, что метрический коэффициент $g_{\alpha\beta}$ совпадает с метрическим коэффициентом $g_{\beta\alpha}$:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} .$$

Поэтому различными могут быть коэффициенты, расположенные на главной диагонали (таких коэффициентов у нас четыре), остальные же коэффициенты попарно равны(таких коэффициентов в нашей таблице шесть). Таким образом, наша матрица в общем случае содержит лишь 10 различных коэффициентов.

В качестве примера "работы" с матрицей (7.16) составим метрический тензор для интервала СТО вида (7.15):

$$g_{a,b} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \qquad (7.17)$$

Такой вид метрического тензора в СТО отражает не только однородность и изотропность пространства (коэффициенты g_{1l}=g_{22}=g_{23}=1). Так как коэффициент g_{44}=*-1*, то это указывает на то, что время хотя и однородно (его любой момент можно взять за начало отсчета), но отличается от свойств пространства (в пространстве можно перемещаться в любом направлении, время же течет от прошлого к будущему).

Рассмотрим более сложный случай нахождения компонент метрического тензора. Пусть имеются две СО, одна инерциальная СО “*L*”, вторая - “*L*’ ” вращается вокруг общей оси *0z* (*0’z’*) с угловой скоростью ω. Таким образом, СО “*L*’ ” является неинерциальной. В ИСО “*L*” воспользуемся цилиндрическими координатами: $x_1=r$, $x_2=\varphi$, $x_3=z$, $x_4=ct$. В ИСО “*L*” квадрат приращения интервала запишется так:

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - c^2dt^2. \qquad (7.18)$$

Определим коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ затем составим метрический тензор:

$$g_{11}=1; \quad g_{22}=r^2; \quad g_{33}=1; \quad g_{44}=-1; \quad g_{\alpha\beta}=0 \text{ при } a \neq b,$$

а сам тензор представим в виде таблицы:

$$g_{a,b} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad (7.19)$$

Формулами перехода от СО “*L*” к СО “*L*’ ” будут равенства (нерелятивистский случай):

$$r=r', \quad \varphi = j' + \omega t', \quad z=z', \quad ct=ct'$$

Подставляя эти формулы в выражение для интервала (7.18), получаем выражение для квадрата приращения интервала в НСО “*L*’ ”:

$$dS^2 = dr'^2 + r'^2 dj'^2 + dz'^2 + 2\frac{w r'^2}{c} dj' d(ct') - \left(c^2 - w^2 r'^2\right) dt'^2. \qquad (7.20)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (7.11) или (7.16), определяем коэффициенты метрического тензора в НСО “*L*’ ”:

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r'^2, \quad g_{33}=1, \quad g_{44} = -\left(1 - \frac{w^2 r'^2}{c^2}\right),$$

$$g_{24} = g_{42} = \frac{w\ r'^2}{c}.$$

Таблица метрического тензора запишется так:

$$g_{a,b}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r'^2 & 0 & \dfrac{w\,r'^2}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{w\,r'^2}{c} & 0 & -\left(1-\dfrac{w^2r'^2}{c^2}\right) \end{vmatrix}. \qquad (7.22)$$

Никакими преобразованиями координат вид этого тензора не свести к “галилеевскому”(7.17) (это утверждение имеет строгое доказательство, но мы его не будем рассматривать).

Из предыдущих рассуждений следует, что наличие в СО истинного или “инерционного” гравитационного поля математически проявляется в метрике пространства-времени, в свойствах метрического тензора. Знание функций $g_{\alpha\beta}\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ позволяет определить все параметры поля, решить все задачи о движении тел в гравитационном поле. Поэтому нахождение функций $g_{\alpha\beta}$ является важной задачей теории. В начале очерка мы обратили внимание, что нас не будут интересовать функции (7.1), что мы изберем другой путь решения задачи о связи гравитации и геометрии. **Величины $g_{\alpha\beta}$ связаны с распределением и движением материи в пространстве и времени, их мы и будем находить.**

Таким образом, с одной стороны, гравитация сводится к геометрическим свойствам пространства-времени, с другой - свойства пространства-времени определяются физическими явлениями и материальными объектами (как вещественными, так и полевыми).

§8. Длина и длительность в ОТО

Рассмотрим этот вопрос сначала качественно. Пусть имеется НСО “L’”, равномерно вращающаяся относительно ИСО вокруг общей оси $0z$ (O’z’). Расположим в плоскости xOy окружность с