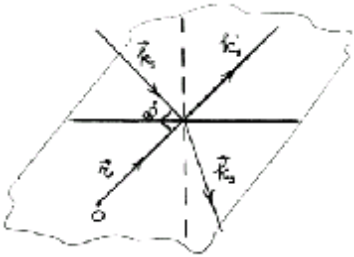
§ 5. Доказательство того, что луч падающий, луч отраженный и преломленный лежат в одной плоскости

До сих пор мы не уточняли положение начала системы координат в выбранной СО. Выберем эту точку на границе раздела двух сред в том месте, чтобы $\vec{r} \perp \vec{k}_1$.



$$\Rightarrow \left(\vec{k}_1 \vec{r}\right) = 0 .$$

Но благодаря (**):

$$\left(\vec{k}_1' \vec{r}\right) = 0, \left(\vec{k}_2 \vec{r}\right) = 0$$

Согласно элементарной геометрии векторы $\vec{k}_1, \vec{k}_1', \vec{k}_2$, при выполнении этих условий, будут лежать в одной плоскости.

§ 6. Угол падения равен углу отражения

Для доказательства этого закона, снова воспользуемся свободой выбора места положения начала координат.

Выберем положение точки О на линии пересечения плоскости лучей с границей раздела двух сред.

Воспользуемся первым равенством в выражении (**).

Покажем, что $k_1 = k_1'$.

Воспользуемся значениями волновых чисел:

$$k_1 = \sqrt{ee_1 m_1 m_0}\,w$$

$$k'_1 = \sqrt{ee_1 m_1 m_0}\,w$$,откуда $\Rightarrow k_1 = k'_1$, а тогда

получаем, что

$$\sin a = \sin b$$

$$\angle a = \angle b \quad .$$

§ 7. Закон Снеллиуса $\frac{\sin a}{\sin g} = n$

Воспользуемся вторым равенством, которое можно получить из (**).

$$\left(\vec{k}_1 \vec{r}\right) = \left(\vec{k}_2 \vec{r}\right),$$

$$k_1 \cos(90 - \alpha) = k_2 r \cos(90 - \gamma),$$

$$k_1 \sin\alpha = k_2 \sin\gamma,.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{k_2}{k_1},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_0\mu_2\mu_0}\,\omega}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_1\mu_0}\,\omega},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}=n_{относительный}.$$

$$n=\sqrt{em}=\sqrt{e}$$

Для большинства диэлектриков $\mu\approx 1$, n – относительный показатель преломления одной среды по отношению к другой, в последнем выражении второй средой является вакуум, для которого $\varepsilon_1 = 1$.

§ 8. Доказательство поперечности электромагнитных волн

Покажем, что в уравнениях Максвелла содержится доказательство поперечности электромагнитных волн

Упростим задачу, и будем рассматривать ее для вакуума. Воспользуемся I уравнением Максвелла для вакуума:

$rot\vec{H}=\frac{\partial e_0\vec{E}}{\partial t}$ (нет тока проводимости, так как вакуум - диэлектрик).

Или

$$\left[\nabla\vec{H}\right]=e_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ранее получили:

$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(wt-\vec{k}\vec{r})}$ - плоская волна.

Соответственно:

$\vec{H}=\vec{H}_0e^{i(wt-\vec{k}\vec{r})}$ - плоская волна.

По определению $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$.

Составим

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot i\omega = \vec{E} i\omega,$$

$$\left[\nabla \vec{H}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right] = -i\left[\vec{k}\vec{H}\right]$$

Составим наше первое уравнение:

$$-i\left[\vec{k}\vec{H}\right] = iw\vec{E}e_0$$

Согласно свойству векторного произведения можно утверждать, что $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{E} \perp \vec{H}$.

Покажем, что $\vec{H} \perp \vec{k}$. Для этого воспользуемся III уравнением Максвелла.

$$div\vec{B} = 0 \cdot$$

Или

$$\left(\nabla \mu_0 \vec{H}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{H}\right) = 0,$$

а используя вид оператора набла, получаем

$$-i\left(\vec{k}\vec{H}\right) = 0 .$$

Скалярное произведение равно нулю, если векторы взаимно перпендикулярны. На этом основании утверждаем: $\vec{k} \perp \vec{H}$.

§ 9. Излучение ускоренно движущегося заряда

Ранее мы получили формулу Био – Савара – Лапласса:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left[\vec{j}\vec{r}\right]}{r^3} dV,$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

$$\rho dV = dq \equiv q\ .$$

(будем рассматривать один заряд в вакууме m = 1).

r – объемная плотность заряда, $\vec{v}$ – скорость его движения.

Так как мы рассматриваем движение одного заряда, тогда для одиночного заряда формулу можно переписать так:

$$\vec{B} = \frac{m_0 q}{4p} \frac{[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}\ .$$

Мы не написали знак интеграла, так как рассматриваем магнитное поле одиночного заряда и нам не надо интегрировать.

Введем единичный орт:

$$\frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0\ .$$

Тогда наше выражение запишется так:

$$\vec{B} = \frac{m_0 q}{4p} \frac{[\vec{v}\vec{r}_0]}{r^2}\ .$$

Будем считать, что заряд начал двигаться в выбранной системе отсчета из состояния покоя, тогда его скорость будет определяться по формуле:

$$\vec{v} = \vec{a}t\ ,$$

причем

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

$$t = \frac{r}{c}.$$

Время t определяет время, которое требуется электромагнитному полю, чтобы преодолеть расстояние r. Тогда формулу для вектора магнитной индукции можно записать так:

$$\vec{B} = \frac{m_0 q}{4p} \frac{r}{c} \frac{\left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \vec{r}_0\right]}{r^2} \cdot \frac{e_0}{e_0} =$$

(мы помножили числитель и знаменатель на ε_0)

Учтем, что $e_0 m_0 = \frac{1}{c^2}$, тогда

$$= \frac{q\left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\vec{r}_0\right]}{4pe_0c^3r} =$$

Обозначим $q\vec{r} = \vec{P}$ -это электрический момент нашего заряда, тогда формулу можно переписать так:

$$= \frac{\left[\frac{d^2\vec{P}}{dt^2}\cdot\vec{r}_0\right]}{4pe_0c^3r}$$

.

Будем рассматривать колебательное движение заряда (то, что происходит, например, в радиоантенне). Возьмем наипростейший характер движения – гармонический. Удобно решать в комплексной форме.

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{iwt}.$$

Возьмем производную:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P}_0\, iwe^{iwt} = \vec{P}\cdot iw,$$

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = -w^2\vec{P}.$$

Подставим в последнюю формулу для вктора магнитной индукции:

$$\vec{B} = \frac{-iw^2\left[\vec{P}\vec{r}_0\right]}{4pe_0c^3r}.$$

Выделим вещественную часть вектора $\vec{B}$.

$$\mathrm{Re}\left|\vec{B}\right| = \frac{w^2P_0\cos wt\sin\left(\vec{P}\vec{r}_0\right)}{4pe_0c^3r}.$$

Воспользуемся выражением, полученным в предыдущем вопросе.

$$-i\left[\vec{k}\vec{H}\right]=iw\vec{E}e_0 .$$

Составим модуль этого выражения:

$$kH=\omega E\varepsilon_0$$

откуда

$$E=\frac{kH}{\omega\varepsilon_0}\frac{\mu_0}{\mu_0}=\frac{kB}{\omega\mu_0\varepsilon_0}$$

Подставим значение модуля $\vec{B}$:

$$k=\sqrt{e_0m_0}w,$$

$$E=\frac{k}{wm_0e_0}\frac{w^2P_0\cos wt\sin\left(\vec{P}\vec{r}_0\right)}{4pe_0c^3r}=$$

$$=\frac{\sqrt{e_0m_0}w^2P_0\cos wt\sin\left(\vec{P}\vec{r}_0\right)}{4pe_0m_0c^3re_0}=$$

$$=\frac{\sqrt{e_0m_0}w^2P_0\cos wt\sin\left(\vec{P}\vec{r}_0\right)}{4pcre_0}.$$

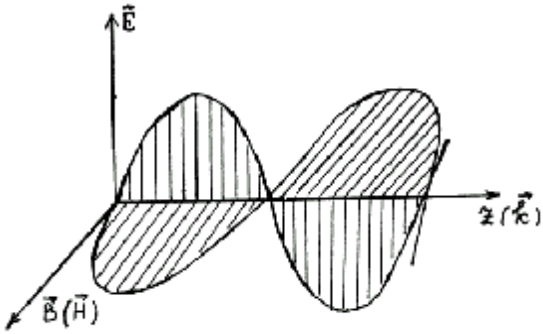
Где учтено, что $e_0m_0=\frac{1}{c^2}$

Получили, что оба вектора электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ гармонически изменяются во времени, следовательно, имеем переменное электромагнитное поле, которое мы называем ***электромагнитными волнами***. Ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны.

Подсчитаем, какое количество энергии переносится электромагнитной волной.

Из полученных выражений для $\vec{B}\left(\vec{H}\right)$ и $\vec{E}$ видно, что они изменяются во времени по гармоническому закону..

Между векторами $\vec{B}$ и $\vec{E}$ этого поля есть взаимосвязь – вдали от источников излучения эти векторы в любой момент времени находятся в фазе, это представлено на рисунке графически:



Воспользуемся вектором Умова – Пойнтинга:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]$$

Как видно из формулы: поток электромагнитной энергии, который определяется вектором Умова – Пойнтинга направлен перпендикулярно плоскости расположения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, которые располагаются в плоскости фронта волны.

Вектор Умова – Пойнтинга –это физическая величина, численно равная количеству электромагнитной энергии, которая проходит по направлению вектора $\vec{S}(\vec{k})$ за единицу времени, через единицу площади.

Зная направление вектора $\vec{S}$, мы можем ограничится подсчетом его модуля. Для этого необходимо составить выражение:

$$S = E \cdot H$$

Учитывая, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят от времени гармонически, необходимо произвести усреднение этой величины за период электромагнитной волны.

В результате усреднения мы получим следующее выражение:

$$\bar{S} = \frac{w^4 P^2{}_0 m_0}{12pcr^2}.$$

Составим произведение $\bar{S}$ на величину поверхности сферы ($4\pi r^2$), которое имеет центром – источник излучения. Мы получим постоянную величину, которая не зависит от расстояния до центра излучения. Мы

рассматривали среду – вакуум, следовательно, в вакууме энергия, излученная далекими звездами не должна поглощаться, проходя любое расстояние. Однако в межзвездном пространстве имеются заряженные частицы. А выше мы доказали, что в проводящей среде электромагнитная волна затухает. Этим, отчасти, можно объяснить темный цвет ночного неба, несмотря на то, что звезд на небе 10^{23} .

§ 10. Релятивистская инвариантность уравнений Максвелла

Несмотря на то, что электродинамика Максвелла бала построена за 40 лет до создания СТО, она оказалась релятивистки инвариантной. Это можно доказать непосредственно, используя уравнения Максвелла и формулы преобразования Лоренца. Но мы поступим так же, как делали в курсе СТО. Сведем нашу задачу к переходу в уравнениях Максвелла к 4 – мерным векторам, тогда на основании теоремы Минковского можно утверждать, что записанные в 4 – мерной форме уравнения Максвелла инвариантны относительно формул преобразования координат и времени Лоренца.

Тем самым, удовлетворяется первый постулат СТО: <u>все</u> физические процессы во всех ИСО при одинаковых условиях протекают одинаково.

Выше было показано, что все уравнения Максвелла сводятся к четырем уравнениям (три уравнения для проекции векторного потенциала и четвертое – для скалярного потенциала). Поэтому будем работать только с этими уравнениями. Будем рассматривать их в вакууме.

$$\Delta \vec{A} - e_0 m_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -m_0 \vec{j} .$$

Соответственно:

$$\Delta j - e_0 m_0 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{e_0} .$$

Введем 4х векторы так:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x_1 = x & \Phi_1 = A_x & j_1 = j_x \\
x_2 = y & \Phi_2 = A_y & j_2 = j_y \\
x_3 = z & \Phi_3 = A_z & j_3 = j_z \\
x_4 = ict & \Phi_4 = \dfrac{i}{c} j & j_4 = icr
\end{array}
$$

Используя эти 4х векторы, четыре уравнения Даламбера запишем так:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2{}_1} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2{}_2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2{}_3} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2{}_4} = -m_0 j_1$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2{}_1} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2{}_2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2{}_3} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2{}_4} = -m_0 j_2$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2{}_1} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2{}_2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2{}_3} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2{}_4} = -m_0 j_3$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2{}_1} + \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2{}_2} + \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2{}_3} + \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2{}_4} = -m_0 j_4$$

Таким образом, мы записали уравнения Даламбера в 4^{-x}-мерной форме и тем самым утвердили релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла.

Электродинамика Максвелла вместе с СТО создала новую картину мира – электродинамическую, которая пришла на смену механической.

В электродинамической картине мира рассматривают два вида материи – вещество и поле. В этой картине мира (ЭДКМ) действует принцип близкодействия. Быстрее, чем распространяется электромагнитный сигнал в вакууме, действие (энергия, количество движения, информация) передаваться не может.

Длина и длительность перестали быть абсолютными величинами, хотя длина тела в этой ИСО, где оно покоится, является инвариантом (абсолютной величиной).

Длительность процесса в той ИСО, где он происходит, в одном месте есть так же его абсолютная характеристика.

Вместо самостоятельных, независимых законов сохранения энергии и количества электричества СТО ввела единый закон. В СТО нет закона

сохранения массы вещественных тел. В начале 20 века были открыты законы микромира. В частности, корпускулярно – волновой дуализм частиц, который в ЭДКМ не учитывается. С начала 20 века началось построение новой ФКМ - квантово – полевой, основанной на законах квантовой механики, квантовой электродинамики и физики элементарных частиц.