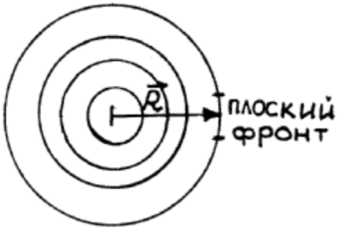
# ГЛАВА 5. *Плоские волны*

Излучатель электромагнитной волны создает вокруг себя фронт этих волн. На больших расстояниях от излучателя волну можно считать ***сферической***. Но на очень больших расстояниях от излучателя небольшой фронт сферической волны, размеры которого во много раз меньше радиуса сферической волны, можно считать ***плоским***.




Особенностью плоской волны является то, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ $(\vec{H})$ лежат в плоскости фронта этой волны, причем во всех точках этой плоскости, которую мы вырезали из сферической волны, эти векторы имеют соответственно одно и то же значение.

## §1. Распространение плоских волн в диэлектрической среде

***Диэлектрик*** – это непроводник, следовательно удельная проводимость $s$ равна нулю, плотность тока проводимости $\vec{j}$ также равна нулю. Поэтому первые два уравнения Максвелла должны быть записаны так:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

Преобразуем I уравнение, используя V и VI, кроме того, возьмем от обеих сторон уравнения операцию rot.

$$rot\,rot\,\vec{H} = rot\,\frac{\partial}{\partial t} ee_0\vec{E} =$$

Согласно сделанному в начале курса предположению, что и поверхности, и контуры со временем не изменяются, мы имеем право поменять местами дифференциальные операции:

$$= ee_0 \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{E} =$$

Воспользуемся II уравнением Максвелла и заменим $rot\vec{E}$:

$$= -ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Здесь мы использовали и VI уравнение Максвелла.

Таким образом, получаем:

$$rot\,rot\,\vec{H} = -ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Воспользуемся формулой векторного анализа:

$$rot\,rot\,\vec{H} = grad\,div\,\vec{H} - \Delta\vec{H}\,.$$

Далее учтем III уравнение:

$$div\vec{B} = 0\,.$$

А если воспользоваться VI уравнением $\vec{B} = mm_0\vec{H}$, то можно записать:

$$div\vec{H} = 0\,.$$

Уравнение для вектора $\vec{H}$ принимает вид:

$$-\Delta\vec{H} = -ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

или

$$\Delta\vec{H} - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0\,.$$

Будем искать решение в виде:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{iwt}$$

Согласно сделанному выше определению плоской волны, можно утверждать, что

$$\vec{H} \neq f(x, y).$$

Поэтому, так как

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \quad \text{то} \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = 0 \, , \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} = 0$$

и от лапласиана остается только один член:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Составим производные:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = e^{i\omega t} \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega e^{i\omega t} \vec{H}_0,$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i\omega t} \vec{H}_0.$$

Уравнение для $\vec{H}$ запишется так:

$$e^{iwt} \frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial z^2} + ee_0 mm_0 w^2 e^{iwt} \vec{H}_0 = 0.$$

Введем обозначение:

$$ee_0 mm_0 w^2 = k^2,$$

где k – волновое число.

Решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial t^2} + k^2 \vec{H}_0 = 0$$

является функцией вида:

$$\vec{H}_0 = \vec{A}e^{ikz} + \vec{B}e^{-ikz}$$

Окончательно

$$\vec{H}(z,t) = \vec{H}_1 e^{i(wt-kz)} + \vec{H}_2 e^{i(wt+kz)}$$

Первое слагаемое в полученном решении описывает плоскую волну, которая распространяется от излучателя, а второе слагаемое определяет - плоскую волну, которая распространяется к источнику (сравним, полученный нами результат, с понятием запаздывающего и опережающего потенциалов, которые получили при решении уравнения Даламбера.)

Определим скорость, с которой распространяется фронт плоской волны, то есть с какой скоростью распространяется та плоскость, в которой находятся векторы $\vec{E}$ *и* $\vec{H}$. Для этого запишем условие, которому должны соответствовать плоскости, в которых фаза волны имеет одно и тоже значение:

$$wt - kz = const$$

Продифференцируем его по времени:

$$w - k\frac{dz}{dt} = 0$$

$\frac{dz}{dt} = U_ф$ - ***фазовая скорость*** – это скорость, с которой перемещается фаза волны.

$$U_ф = \frac{w}{k} = \frac{w}{w\sqrt{ee_0 mm_0}} = \frac{1}{\sqrt{m_0 e_0}\sqrt{em}} = \frac{c}{n}$$

(по формулам Максвелла (смотри решение уравнения Даламбера)

$\sqrt{em} = n, \sqrt{e} = n, m \approx 1$)

Если провести аналогичные операции и рассуждения для вектора напряженности $\vec{E}$, то получим

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1 e^{i(wt-kz)} + \vec{E}_2 e^{i(wt+kz)}$$

$$\operatorname{Re}\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1 \cos(wt - kz)$$

Из рассмотренных двух формул видим, что амплитуды векторов электромагнитной волны при распространении через диэлектрическую среду, не изменяются, следовательно и плотность электромагнитной энергии w такой волны не изменяется. Распространение электромагнитной волны в диэлектрической среде происходит без потери энергии. Одной из иллюстраций полученного результата является то, что можно видеть на небе очень далекие звезды, от которых свет идет миллиарды световых лет.

## § 2. Распространение электромагнитной волны в проводящей среде

В случае проводящей среды I уравнение Максвелла запишется с учетом тока проводимости так:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$
$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad ,$$

II уравнение Максвелла совпадает по виду в данной задаче со II уравнением Максвелла для диэлектрической среды, поэтому можно преобразовать лишь правую сторону I уравнения Максвелла, чтобы свести его к виду, который имела правая часть I уравнения Максвелла в случае диэлектрической среды. Правда, мы придадим правой части I уравнения для диэлектрической среды немного другой вид. Мы имели:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = ee_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Воспользуемся решением предыдущей задачи:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{i(wt-kz)}; \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{E}_1 iwe^{i(wt-kz)} = iw\vec{E}.$$

Таким образом, для диэлектрической среды имеем:

$$rot\vec{H} = iee_0 w\vec{E}.$$

Поставим перед собой цель: записать I уравнение для проводящей среды в таком же виде, какой мы получили для диэлектрической среды.

Воспользуемся VIII уравнением Максвелла. Будем считать, что сторонней ЭДС на том участке, который мы рассматриваем, нет. Тогда VIII уравнение Максвелла примет вид:

$$\vec{j} = s\vec{E}.$$

Первое уравнение для проводящей среды запишется так:

$$rot\vec{H} = s\vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = s\vec{E} + ee_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Пусть в проводящей среде характер вектора $\vec{E}$ будет таким же, каким он был в диэлектрической среде, то есть будем считать, что для проводящей среды:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{i(wk-k'z)}.$$

У волнового числа k – штрих, чтобы учесть различие диэлектрической и проводящей сред. Для диэлектрической среды имеем:

$$k = w\sqrt{ee_0 mm_0}.$$

От свойства среды зависит именно k, поэтому выбираем для напряженности поля тот же характер изменения (во времени, в пространстве). Штрих символизирует то, что речь идет о проводящей среде.

Подставляя в I уравнение Максвелла для проводящей среды VIII уравнение, получим:

$$rot\vec{H} = iee_0w\vec{E}\left(1+\frac{s}{iee_0w}\right) = iee_0w\vec{E}\left(1-\frac{is}{ee_0w}\right) = = ie'e_0w\vec{E}.$$

В случае диэлектрической среды I уравнение Максвелла было:

$$rot\vec{H} = iee_0w\vec{E}.$$

Если в предыдущем выражении введем обозначение $e'$, то получим и для проводящей среды то же по виду уравнение, что и для диэлектрика:

$$rot\vec{H} = iwe'e_0\vec{E}.$$

Для диэлектрической среды решение для $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 e \exp^{i(wt-kz)} + \vec{H}_2 \exp^{i(wt+kz)}$$

Выше мы ввели обозначения для модуля волнового вектора;

$k = \sqrt{ee_0mm_0}w$ , в случае диэлектрика $e$ - реальная величина.

В нашем случае (проводящая среда):

$k' = \sqrt{e'e_0mm}\ w$ , $e'$- комплексная величина.

А так как ε' – комплексная величина, то и волновое число комплексное, поэтому можно записать в случае проводящей среды:

$$k' = k_1 - ik_2$$

Для проводящей среды решение задачи принимает вид:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 e^{i(wt-k'z)} + \vec{H}_2 e^{i(wt+k'z)}$$

Первое слагаемое описывает реальный процесс распространения электромагнитной волны от источника, второе – волна, идущая к источнику, физического смысла в нашей задаче не имеет:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 e^{i[wt-(k_1-ik_2)z]} = \vec{H}_1 e^{i(wt-k_1z)} e^{-k_2z} = \vec{H}_1 e^{-k_2z} e^{i(wt-k_1z)}.$$

- будет убывать с распространением волны вовнутрь проводящей среды (затухание амплитуды), а следовательно и энергия электромагнитной волны уменьшается.

Так как $k_2$ зависит от ε', а ε' от $\partial$, то чем больше $\partial$, тем быстрее затухание.

Проводящая среда поглощает энергию электромагнитной волны, так как под действием ее происходит перемещение заряженных частиц (на это, должна быть затрачена энергия).

## § 3. Законы геометрической оптики

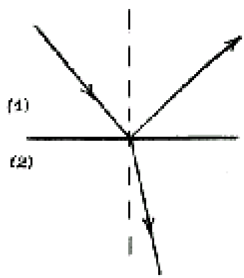
Рассматривая электромагнитные волны установили, что световые волны являются частным случаем электромагнитных волн и многие оптические явления можно объяснить, исходя из представлений геометрической оптики. Основным понятием является понятие светового луча.

***Световой луч*** – выделенный пучок световой энергии, сечение которого считается бесконечно малым по сравнению с протяженностью светового пучка.

Основные законы геометрической оптики были установлены еще в древнем мире. Их знал Архимед. Математическое выражение им дал Снеллиус в 16 веке.

Покажем, что законы геометрической оптики также содержатся в уравнениях Максвелла. Точнее говоря не в самих уравнениях, а в следствиях из них, которые мы получили в начале курса и назвали – “граничные условия для векторов электромагнитного поля”.

Выберем СО “Лаборатория”. Систему координат совместим в границей раздела. Пусть обе среды – диэлектрики.




Воспользуемся граничным условием для тангенсальной компоненты вектора $\vec{E}$. Мы показали, что $E_t$ не испытывает скачка (непрерывно) при переходе через границу раздела двух сред.

Раньше мы предполагали, что в каждой среде имеется лишь одна электромагнитная волна. В нашей же задаче на границе раздела двух сред происходит не только преломление, но и отражение, поэтому в первой среде будут две волны – подающая и отраженная, два луча – падающий и отраженный. Поэтому граничные условия должны учитывать этот момент.

Световой луч направлен перпендикулярно фронту световой волны, фронт световой волны плоский. Можно записать:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{i(wt-kz)},$$
$$k \cdot z \equiv (\vec{k}\vec{r}),$$
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{i\left[wt-(\vec{k}\vec{r})\right]},$$

где $\vec{k}$ - волновой вектор, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения.

Составим граничное условие, учитывая, что в первой среде есть две волны:

$$E_{01t}\, e^{i\left[w_1 t-(\vec{k}_1\vec{r})\right]} + E'_{01t}\, e^{i\left[w'_1 t-(\vec{k}'_1\vec{r})\right]} = E_{02t}\, e^{i\left[w_2 t-(\vec{k}_2\vec{r})\right]} \qquad (*)$$

Индекс (1) относится к падающей волне (лучу). Индекс (1) – к отраженному лучу.

***Доказательство того, что частота электромагнитной волны при отражении и преломлении не изменяется.***

Воспользуемся (*) и запишем его так:

$$ae^{iw_1 t} + be^{iw'_1 t} = ce^{iw_2 t},$$

где $E_{01t}\, e^{\left[-(\vec{k}_1\vec{r})\right]} = a, E'_{01t}\, e^{\left[-(\vec{k}'_1\vec{r})\right]} = b, E_{02t}\, e^{\left[-(\vec{k}_2\vec{r})\right]} = c$.

Продифференцируем по времени:

$$iw_1 ae^{iw_1 t} + iw'_1 be^{iw'_1 t} = iw_2 ce^{iw_2 t}$$

Заменим справа в последнем равенстве $ce^{iw_2 t}$, используя предыдущее равенство:

$$aw_1 e^{iw_1 t} + bw'_1 e^{iw'_1 t} = w_2 ae^{iw_1 t} + w_2 be^{iw'_1 t}$$

Объединим члены:

$$ae^{iw_1 t}(w_1 - w_2) = be^{iw'_1 t}(w_2 - w'_1)$$

Разделим на $e^{iw'_1 t}$:

$$ae^{i(w_1 - w'_1 t)}(w_1 - w_2) = b(w_2 - w'_1)$$

Левая сторона выражения зависит от времени, а правая - нет .Этого не может быть, поэтому сделаем показатель степени равным нулю, что возможно, если:

$$w_1 = w'_1 \Rightarrow e^{i(w_1 - w'_1)t} = 1$$

При отражении, частота не меняется. Аналогично, если освободимся не от $ce^{i\omega'_1 t}$, а от $ae^{iw_1 t}$, то можно будет показать, что:

$$w'_1 = w_2$$

Частота при преломления волны не изменяется.

$$w_1 = w'_1 = w_2 .$$

## § 4. Получение основного равенства для вывода следующих законов геометрической оптики

Снова воспользуемся условием непрерывности $E_t$ на границе раздела двух сред.

$$E_{01t} e^{i(w_1 t - \vec{k}_1 \vec{z})} + E'_{01t} e^{i(w'_1 t - \vec{k}'_1 \vec{z})} = E_{02t} e^{i(w_2 t - \vec{k}_2 \vec{z})},$$
$$z = r$$

Выше было доказано, что:

$$w_1 = w'_1 = w_2 = w$$

Введем обозначения:

$$E_{01t} e^{iwt} = l, \quad E'_{01t} e^{iwt} = m, \; E_{02t} e^{iwt} = n \; .$$

Тогда соотношение (*) запишется так:

$$le^{-i(\vec{k}_1 \vec{r})} + me^{-i(\vec{k}'_1 \vec{r})} = ne^{-i(\vec{k}_2 \vec{r})}$$

В этом выражении r указывает положение точки падения луча. Но выбрав систему отсчета, мы не указали положение начала системы координат, поэтому $|\vec{r}|$ здесь может быть любым (конечным). Но тогда это равенство может выполняться только при одном условии, если оно не зависит от расстояния.

Чтобы это равенство выполнялось при любом r, то есть не зависело от r, нужно чтобы экспоненты были равны друг другу, откуда

$$\left(\vec{k}_1 \vec{r}\right) = \left(\vec{k}'_1 \vec{r}\right) = \left(\vec{k}_2 \vec{r}\right). \qquad (**)$$