

ГЛАВА 4. Квазистационарные процессы

К квазистационарным процессам относятся все электромагнитные процессы, в которых можно пренебречь токами смещения.

Запишем полную систему уравнений Максвелла:

$$I). \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \text{где } N = \int D_n ds$$

$$II). \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \oint E_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{s}$$

$$III). \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \oint B_n ds = 0$$

$$IV). \operatorname{div} \vec{D} = r; \quad \oint \vec{D} d\vec{s} = Q$$

$$V). \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

$$VI). \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

$$VII). \operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial r}{\partial t}; \quad \oint \vec{j} d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} Q = I,$$

$$VIII). \vec{j} = s (\vec{E} + \vec{E}^{cmp}); \quad I = \frac{e}{R+r},$$

Квазистационарные процессы будут определяться всеми восемью уравнениями Максвелла, причем, кроме тока смещения в I уравнении, все остальные производные по времени сохраняются.

Таким образом, квазистационарные процессы подчиняются следующим уравнениям Максвелла:

$$I). \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}; \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = I,$$

$$II). \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \oint E_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{s},$$

$$\text{III). } \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0; \quad \oint B_n ds = 0,$$

$$\text{IV). } \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = r; \quad \oint \dot{\mathbf{D}} d\mathbf{s} = Q,$$

$$\text{V). } \dot{\mathbf{D}} = ee_0 \dot{\mathbf{E}}.$$

$$\text{VI). } \dot{\mathbf{B}} = mm_0 \dot{\mathbf{H}},$$

$$\text{VII). } \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}} = -\frac{\partial r}{\partial t}; \quad \oint \dot{\mathbf{j}} d\mathbf{s} = -\frac{\partial Q}{\partial t},$$

$$\text{VIII). } \dot{\mathbf{j}} = s \left(\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^{cmp} \right); \quad I = \frac{e}{R+r}.$$

Установим критерий для квазистационарных процессов.

Токи смещения по величине во много раз меньше токов проводимости. Тогда выполняется следующее условие:

$$\frac{\left| \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} \right|}{\left| \dot{\mathbf{j}} \right|} \ll 1.$$

Получим числовую оценку для наиболее часто встречающегося случая, когда $\dot{\mathbf{D}}$ (или $\dot{\mathbf{E}}$) гармонически изменяется во времени.

$$\dot{\mathbf{D}} = ee_0 \dot{\mathbf{E}} = ee_0 \dot{\mathbf{E}}_0 \exp(i\omega t)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} = ee_0 \dot{\mathbf{E}}_0 i\omega e^{i\omega t}$$

$$\dot{\mathbf{j}} = s \dot{\mathbf{E}} = s \dot{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t}$$

Таким образом:

$$\frac{\left| \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} \right|}{\left| \dot{\mathbf{j}} \right|} = \frac{ee_0 \dot{\mathbf{E}}_0 \omega}{s \dot{\mathbf{E}}_0} = \frac{ee_0 \omega}{s}$$

Так как берем по модулю, то мнимость убираем. Рассмотрим конкретный пример: медный проводник $e = 1$, $e_0 \cong 10^{-12} \Phi / м$, $s_{cm} \approx 10^7 1 / (Ом \cdot м)$.

Рассмотрим случай, когда $w = 10^{10} Гц$ (легко показать, что это относится к области волн в метровом диапазоне).

Тогда критерий квазистационарности принимает значение:

$$\frac{\left| \frac{\partial D}{\partial t} \right|}{\left| j \right|} \frac{1 \cdot 10^{12} \Phi / м \cdot 10^{10} 1 / с}{10^7 1 / (Ом \cdot м)} = 10^{-9} \ll 1, \text{ следовательно, условие}$$

квазистационарности выполняется очень хорошо практически для всего радиодиапазона волн.

Проверим размерность(наименование) нашего критерия:

$$\frac{\Phi \cdot Ом}{с} = \frac{Кл}{В} \cdot \frac{Ом}{с} = \frac{А \cdot с}{В} \cdot \frac{Ом}{с} = \frac{Ом}{Ом} \text{ или } \frac{В}{В} = 1.$$

§ 1. Закон Ома для квазистационарных процессов

Ранее, рассматривая цепь постоянного тока, мы получили уравнение закона Ома:

$$IR = j_1 - j_2 + e^{cmp}$$

где левая сторона – падение напряжение, $\Phi_1 - \Phi_2 = U$ напряжение или разность потенциалов. e^{cmp} - сторонняя ЭДС.

При выводе уравнения мы учитывали, что во II уравнении для постоянных токов правая часть равна нулю. Но в рассматриваемом случае квазистационарных токов необходимо учитывать наличие явления электромагнитной индукции (ЭМИ).

Добавочная ЭДС обусловлена не равной нулю правой части II уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial \dot{B}}{\partial t} \neq 0.$$

Определим ее величину, для чего воспользуемся самим II уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$\oint E_l dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int B_n ds.$$

Смысл левой стороны этого равенства был установлен при анализе II уравнения Максвелла. Левая сторона определяет ЭДС, которая обусловлена явлением ЭМИ, ее называют ЭДС – индукции. Она равна:

$$e_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} \int B_n ds.$$

Воспользуемся формулой:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= rot \dot{A} & B_n &= rot_n \dot{A} \\ e_{ind} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int rot_n \dot{A} ds = -\frac{\partial}{\partial t} \oint A_l dl = \end{aligned}$$

Применим теорему Стокса, которая связывает поверхностный интеграл с контурным интегралом.

Воспользуемся полученным ранее выражением:

$$\dot{A} = \frac{mm_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{r}.$$

Тогда

$$e_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \frac{mm_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{r} dl = -\frac{mm_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} I \oint \oint \frac{d\vec{l} d\vec{l}}{r},$$

или

$$e_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} (IL), \text{ где } L = \frac{mm_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}}{r}.$$

Как было показано в предыдущем параграфе, коэффициент самоиндукции зависит от геометрии цепи. Мы считаем, что геометрические размеры во времени не изменяются, L можно вынести за знак производной:

$$e_{ind} = -L \frac{\partial}{\partial t} I.$$

Уравнение закона Ома для квазистационарных процессов с учетом явления электромагнитной индукции запишется так:

$$IR = (j_1 - j_2) + e^{cmp} - L \frac{dI}{dt},$$

где символ ∂ заменен на d , так как геометрия цепи не изменяется (x, y, z от t не зависят).

$$IR + L \frac{dI}{dt} - (j_1 - j_2) = e^{cmp} \quad (*)$$

§ 2. Решение уравнения закона Ома для случая периодической зависимости от времени сторонней ЭДС

Преобразуем (*). Умножим обе стороны на C (емкость) электрической цепи и продифференцируем по времени.

$$RC \frac{dI}{dt} + LC \frac{d^2 I}{dt^2} + I = C \frac{de^{cmp}}{dt},$$

где стороннюю ЭДС возьмем периодически зависящей от времени:

$$e^{cmp} = e_0 e^{i\omega t}.$$

Комплексная форма выбрана для математического решения задачи, конечный результат будет вещественным. При составлении предыдущего равенства было использовано соотношение:

$$I = -\frac{d}{dt} Q = -\frac{d}{dt} \{C(\varphi_1 - \varphi_2)\}, \quad \text{что следует из VII уравнения}$$

Максвелла и определения емкости, как физической величины. Расположим члены по убыванию порядка производной:

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + RC \frac{dI}{dt} + I = Ci\omega e^{cmp}$$

Будем искать решение этого уравнения в форме правой части:

$I = I_0 e^{i\omega t}$. Составим члены уравнения:

$$\frac{dI}{dt} = I_0 i\omega e^{i\omega t},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} I \right) = \frac{d}{dt} (I_0 i\omega e^{i\omega t}),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dI}{dt} \right) = -I_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

Составим уравнение:

$$-LCI_0\omega^2 e^{i\omega t} + RC I_0 i\omega e^{i\omega t} + I_0 e^{i\omega t} = C i\omega e^{i\omega t}$$

Так как $e^{i\omega t} \neq 0$, то на нее можно сократить. Получим уравнение для амплитуды тока:

$$I_0 = \frac{C i\omega e_0}{1 + RC i\omega - LC\omega^2}.$$

Проведем элементарные математические преобразования:

$$I_0 = \frac{C i\omega e_0}{C i\omega \left(\frac{1}{C i\omega} + R - \frac{L\omega}{i} \right)} = \frac{e_0}{-\frac{i}{C\omega} + R + Li\omega}$$

$$I_0 = \frac{e_0}{R + i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на комплексно – сопряженную знаменателю величину:

$$I_0 = \frac{e_0 \left[R - i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[R + i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \left[R - i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} =$$

$$= \frac{e_0 \left[R - i \left(wL - \frac{1}{wC} \right) \right]}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC} \right)^2} .$$

Введем новые переменные:

$$R = r \cos j ,$$

$$wL - \frac{1}{wC} = r \sin j ,$$

где

$$\operatorname{tg} j = \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R} .$$

С другой стороны:

$$r^2 = R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC} \right)^2 .$$

Получаем

$$I_0 = \frac{e_0 [r \cos j - i r \sin j]}{r^2} = \frac{e_0 (\cos j - i \sin j)}{r} .$$

Используем формулу Эйлера:

$$e^{\pm i j} = \cos j \pm i \sin j .$$

Тогда для амплитуды получаем :

$$I_0 = \frac{e_0 e^{-i j}}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC} \right)^2}} .$$

Общее решение уравнения принимает вид:

$$I = I_0 e^{i w t} = \frac{e_0 e^{i(w t - j)}}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC} \right)^2}} .$$

Сравнивая фазу ЭДС и фазу тока, мы устанавливаем, что эти фазы в общем случае не совпадают, так как

$$j = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

Величину $\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ называют полным сопротивлением в цепи переменного тока.

R – омическая составляющая, ωL – индуктивная составляющая, $\frac{1}{\omega C}$ – емкостная составляющая полного сопротивления.

Если $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ (**), то $j = 0$. Такое состояние электрической цепи называется **электрическим резонансом**.

В этом случае в цепи выделяется наибольшая мощность. В противном случае, когда $j \neq 0$, часть мощности электрического тока бесполезно блуждает по этой цепи, энергия электрического тока периодически перемещается между участками сосредоточенных индуктивности и емкости. Таким образом, чтобы повысить КПД электрической сети, подбирают такие ее индуктивность и емкость, чтобы сдвиг по фазе был наименьшим, тогда КПД будет наибольшим.

Из (**) получается формула Томсона:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

§ 3. Мощность в цепи квазистационарного тока

По определению мощность любого тока определяется так:

$$P = Ie$$

Выше для квазистационарного тока мы получили :

$$I = I_0 e^{i(\omega t - j)},$$

$$e = e_0 e^{i\omega t},$$

где φ – определяется физическими свойствами электрической цепи:

$$j = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Составим выражение для полной мощности:

$$P = I_0 e_0 e^{i\omega t} \cdot e^{i(\omega t - j)}$$

Комплексное решение предыдущей задачи было выполнено для математического удобства. Все физические величины и соответствующие физические приборы измеряют только вещественные величины, поэтому выделим в полной мощности ее реальную часть:

$$\operatorname{Re} P = I_0 e_0 \cos \omega t \cos(\omega t - j).$$

В полученном выражении видно, что мощность четырежды за период становится равной нулю. Поэтому вместо используемой формулы, которая определяет мгновенное значение мощности, получим усредненную за период мощность.

$$\operatorname{Re} \bar{P} = I_0 e_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t - j) dt =$$

Если воспользоваться школьными формулами по тригонометрии, то в результате интегрирования получим 2 слагаемых, один из которых равен нулю, а другой $1/2 \cos \varphi$

$$= I_0 e_0 \frac{1}{2} \cos j =$$

где $\cos \varphi$ – **коэффициент мощности**.

Запишем это выражение по – другому:

$$= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e_0}{\sqrt{2}} \cos j.$$

Введем обозначения:

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = I_{\text{эф}} , \quad \frac{e_0}{\sqrt{2}} = e_{\text{эф}} .$$

$$\text{Тогда: } \Rightarrow \operatorname{Re} \bar{P} = I_{\text{эф}} \cdot e_{\text{эф}} \cdot \cos j , \quad \text{где } j = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} ,$$

L, R, C – характеристики электрической цепи, а ω – задается генератором.

$I_{\text{эф}}, e_{\text{эф}}$ – это то, что показывают измерительные приборы (в цепи квазистационарных процессов).

$I_{\text{эф}} (e_{\text{эф}})$ – величина такого постоянного тока, при прохождении которого по той же цепи, выделяется столько же энергии, сколько при прохождении квазистационарного тока.

§ 4. Закон сохранения и превращения энергии в электромагнитных процессах (ЗСПЭ)

Электромагнитное поле – это второй вид известной ныне материи (первый – вещество), поэтому как всякий материальный объект электромагнитное поле обладает энергией.

Покажем, что ЗСПЭ содержится в самих уравнениях Максвелла. Воспользуемся I и II уравнениями Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\dot{\mathbf{E}})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\dot{\mathbf{H}})$$

Домножим первое уравнение скалярно на $\dot{\mathbf{E}}$, второе – на $\dot{\mathbf{H}}$ и вычтем из второго первое выражение:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \mathbf{H} = - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{j} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (*)$$

Воспользуемся формулой векторного анализа:
 $\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}] = \dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \mathbf{H}$, а также произведем простейшие действия:

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t} &= \left| \dot{\mathbf{B}} = m m_0 \dot{\mathbf{H}} \right| = m m_0 \dot{\mathbf{H}} \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial t} = \\
m m_0 \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}})}{\partial t} &= m m_0 \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{m m_0 H^2}{2}
\end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} &= \left| \dot{\mathbf{D}} = e e_0 \dot{\mathbf{E}} \right| = \frac{\partial}{\partial t} \frac{e e_0 E^2}{2}, \\
j \mathbf{E} &= \left| \begin{aligned} \mathbf{j} &= s (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmp}) \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{s} - \mathbf{E}^{cmp} \end{aligned} \right| = \mathbf{j} \left(\frac{\mathbf{j}}{s} - \mathbf{E}^{cmp} \right) = \\
&= \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{s} - \mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp} = \frac{j^2}{s} - \mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp}.
\end{aligned}$$

$$\text{Итак: } \operatorname{div} [\mathbf{E} \dot{\mathbf{H}}] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{e e_0 E^2 + m m_0 H^2}{2} + \frac{j^2}{s} = \mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp} \quad (**).$$

Это есть дифференциальная форма записи ЗСПЭ.

Если (**) умножить на dV и проинтегрировать по всему объему, где есть электромагнитное поле и токи, то получим интегральную форму записи ЗСПЭ.

Проанализируем смысл членов в (**). Воспользуемся теоремой метода размерностей: наименование произведения есть произведение наименований.

$$[\mathbf{j} \mathbf{E}^{cmp}] = [\mathbf{j}] [\mathbf{E}^{cmp}] = \frac{Kл}{c \cdot M^2} \cdot \frac{B}{M} = \frac{A \cdot c \cdot B}{c \cdot M^3} = \frac{Дж}{M^3 \cdot c}$$

Все, что происходит в полной цепи, совершается за счет работы сторонних сил, энергии, затрачиваемой этими сторонними силами за

единицу времени в единицу объема. Если рассматривать не дифференциальную форму, а интегральную, то работа сторонних сил совершалась бы за счет их энергии, рассредоточенной во всем объеме.

Так как $\frac{Дж}{с} = Bm$, то можно говорить о мощности сторонних сил, заключенных в единице объема.

Рассмотрим каждый член слева в (**):

$$\begin{aligned} \left[\frac{j^2}{s} \right] &= \left| R = r \frac{l}{s} = \frac{1}{s} \frac{l}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{R \cdot s}{l} \right| = \\ &= \frac{Kl^2}{c^2 \cdot M^4} \cdot \frac{Om \cdot M^2}{M} = \frac{Kl^2 \cdot Om \cdot M^2}{c^2 \cdot M^4 \cdot M} = \frac{A^2 \cdot c^2 \cdot Om}{c^2 \cdot M^3} = \\ &= \left| I = \frac{U}{R} \right. \\ &\quad \left. R = \frac{U}{I}; [R] = \frac{A}{B} \right| = \frac{A^2 \cdot B \cdot c}{A \cdot M \cdot M^3 \cdot c} = \frac{Дж}{с \cdot M^3}. \end{aligned}$$

$\frac{j^2}{s}$ - это та внутренняя энергия, которая выделяется в единице объема в единицу времени в цепи при прохождении тока. Если в цепи нет проводимости, этот член равен нулю.

Рассмотрим смысл второго члена:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{ee_0 E^2 + mm_0 H^2}{2} \right] &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{mm_0 H^2}{2} \right] = \frac{[\partial][m][m_0][H^2]}{[\partial t][2]} = \\ &= \frac{\Gamma_H}{M \cdot c} \left(\frac{A}{M} \right)^2 = \frac{\Gamma_H \cdot A^2}{с \cdot M^3} = \frac{Дж}{с \cdot M^3}, \end{aligned}$$

так как $\Gamma_H \cdot A^2 = Дж$.

Аналогично:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{ee_0 E^2}{2} \right] &= \frac{[\partial][e][e_0][E^2]}{[\partial t][2]} = \frac{\frac{\Phi}{m} \cdot \frac{B^2}{m}}{c} = \frac{\Phi \cdot B^2}{m^3 \cdot c} = \\ &= \frac{\frac{Kл}{B} \cdot B^2}{m^3 \cdot c} = \frac{A \cdot B \cdot c}{m^3 \cdot c} = \frac{Дж}{m^3 \cdot c}. \end{aligned}$$

Учитывая, что деление на m^3 дает объемную плотность электрической $\frac{ee_0 E^2}{2}$ и магнитной $\frac{mm_0 H^2}{2}$ энергии, можно сказать, что второй член слева в (**) определяет изменение объемной мощности электромагнитной энергии.

Рассмотрим первое слагаемое, в котором вектор $\dot{\mathbf{S}} = [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}]$ называется вектором Умова-Пойтинга:

$$\begin{aligned} [\text{div}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}]] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}]_x + \dots \right] = \frac{[\partial][\dot{\mathbf{E}}][\dot{\mathbf{H}}]}{[\partial x]} = \frac{\frac{B}{m} \cdot \frac{A}{m}}{m} = \frac{B \cdot A}{m^3} \cdot \frac{c}{c} = \\ &= \frac{Дж}{c \cdot m^3}. \end{aligned}$$

Операция div определяет истечение электромагнитной энергии. Это истечение электромагнитной энергии происходит из мест нахождения сторонних сил.

Рассмотрим смысл векторного произведения:

$$[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] = \left| \begin{array}{l} \dot{\mathbf{j}} = s(\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^{cmp}) \\ \dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\mathbf{j}}}{s} - \dot{\mathbf{E}}^{cmp} \end{array} \right| = \left[\frac{\dot{\mathbf{j}}}{s} \dot{\mathbf{H}} \right] - [\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \dot{\mathbf{H}}].$$

Так как в случае линейных токов векторы $\dot{\mathbf{j}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ параллельны друг другу, и если условно считать, что первое векторное произведение определяет положительное направление движения энергии (во внутрь проводника), тогда второе определяет противоположное направление движения (из области нахождения сторонних сил).

Выясним физический смысл первого векторного произведения.

$$\left[\frac{\mathbf{r}}{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{j}}{H} \right] = \left[\frac{jH}{\sigma} \right] = \left[\frac{I}{s} \cdot \frac{I}{2\pi r} \frac{1}{\sigma} \right] = \left[\frac{I}{s} \frac{I}{2\pi r} \frac{RS}{l} \right] =$$

где учтено, что для линейного тока:

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

$$j = \frac{I}{S},$$

$$\frac{1}{s} = \frac{rS}{l}.$$

r – расстояние до точки наблюдения (в нашем случае - это радиус проводника), $2\pi rl = S_{бок}$

$$= \left[\frac{I^2 R}{S_{бок}} \frac{c}{c} \right] = \frac{Дж}{S_{бок} \cdot c}$$

Если положительное направление движения энергии считать направленным внутрь проводника, то получается, что первое слагаемое определяет ту энергию, которая втекает за каждую секунду через каждую единицу боковой поверхности проводника и превращается во внутреннюю энергию этого проводника.

На основании метода размерности устанавливаем, что второе векторное произведение определяет энергию, которая вытекает за единицу времени и через единицу поверхности проводника, во вне электрической цепи. Но это истечение происходит только из мест, где находится источник сторонних сил.

В 19 веке эту энергию называли – лучистой энергией. В современной терминологии – это электромагнитная энергия.

Формулу (**) можно истолковать так:

*- энергия вырабатывается там, где находятся сторонние силы (правая сторона равенства (**)). Распространяясь (если есть проводники) вдоль проводников, эта энергия захватывает внутрь проводников и превращается во внутреннюю энергию проводников (в этом случае проводники выполняют роль “направляющих” движения энергии).*

Второй член учитывает переменные электро- магнитные процессы и утверждает, что энергия в окрестности некоторой точки будет изменяться во времени (за счет переменных процессов), которые не локализируются, а распространяются в пространстве.

§ 5. Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

В 1901 году русский физик Лебедев экспериментально обнаружил, что электромагнитные волны оказывают давление. С точки зрения механики это означает, что электромагнитные волны обладают количеством движения. Покажем, что в уравнениях Максвелла содержится ЗСКД в замкнутой системе “электромагнитное поле” + “электрические заряды”. Для этого воспользуемся формулой Лоренца для объемной плотности силы, с которой электромагнитное поле воздействует на неподвижные и движущиеся заряды:

$$\dot{\mathbf{f}} = r\dot{\mathbf{E}} + r[\dot{\mathbf{V}}\mathbf{B}]$$

Рассмотрим смысл величины $r\dot{\mathbf{V}}$, для чего рассмотрим размерность:

$$[r\dot{\mathbf{V}}] = \frac{Kл}{M^3} \cdot \frac{M}{c} = \frac{Ac}{M^2 \cdot c} = \frac{A}{M} = [j]$$

Тогда
$$\dot{\mathbf{f}} = r\dot{\mathbf{E}} + [\dot{\mathbf{j}}\mathbf{B}]$$

Воспользуемся IV и VIII уравнениями Максвелла. Упростим задачу, и будем рассматривать электромагнитное поле, заряды и токи в вакууме. Тогда IV уравнение Максвелла можно записать так:

$$\text{div}\dot{\mathbf{E}} = \frac{r}{e_0}.$$

Восьмое уравнение Максвелла:

$$\dot{\mathbf{j}} = s(\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}_{cmp})$$

Но в вакууме $\partial = 0$, поэтому это уравнение нельзя использовать для выражения вектора плотности тока. Поэтому для выражения $\dot{\mathbf{j}}$ воспользуемся I уравнением Максвелла:

$$\text{rot}\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{j}} + e_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial t}, \text{ так как } \dot{\mathbf{D}} = e_0 \dot{\mathbf{E}}.$$

И в IV, и в I уравнениях Максвелла мы использовали V уравнение, записанное для вакуума.

Из этих уравнений Максвелла выразим соответственно $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{j}}$ и подставим в формулу для силы Лоренца:

$$\mathbf{f} = e_0 \operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + [\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{B}] - e_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{r} \right]$$

Воспользуемся II и III уравнениями Максвелла. Умножим II уравнение векторно справа на $\dot{\mathbf{D}}$, а III – скалярно на $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \times (\dot{\mathbf{D}}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \quad \cdot (\dot{\mathbf{H}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot} \mathbf{E} \mathbf{D}] + \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{D} \right] &= 0, \\ \dot{\mathbf{H}} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Прибавим эти величины, заведомо равные нулю, к правой части силы Лоренца:

Во втором слагаемом мы использовали VI уравнение Максвелла.

$$\mathbf{f} = e_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{r} + m_0 \dot{\mathbf{H}} \operatorname{div} \mathbf{r} + [\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{B}] + [\operatorname{rot} \mathbf{E} \mathbf{D}] - \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{r} \right] - \left[\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]$$

В шестом члене произвели перестановку множителей, из-за чего изменили знак. А в пятом члене использовали V уравнение Максвелла.

Умножим обе стороны равенства на элемент объема dv и проинтегрируем по объему замкнутой системы, состоящей из зарядов, токов и электромагнитного поля:

$$\int \mathbf{f} dV = \mathbf{F}$$

- это полная, суммарная сила, рассредоточенная с объемной плотностью $\mathbf{f}$.

$$\int \mathbf{r} f dV = \mathbf{F} = A - \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{r} \right] + \left[\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \right\} dV \quad (*)$$

где A – краткая запись первых четырех интегралов, стоящих в правой части предыдущего выражения.

Можно показать, что величина A при интегрировании по всему пространству системы даст нулевой вклад.

Представим левую сторону равенства с помощью формулы Ньютона в импульсной форме:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

где $\mathbf{P}$ – полный импульс системы.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{P}_0 dV = - \int \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \mathbf{B}] dV$$

где $\mathbf{P}_0$ – количество движения единицы объема.

Перепишем выражение (*):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{P}_0 dV = - \int \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \mathbf{B}] dV$$

Слева полная производная заменена на частную согласно соглашению, что объем, поверхность и контур не изменяются во времени. Справа воспользовались свойством производной от векторного произведения. Перепишем так:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{P}_0 + [\mathbf{D} \mathbf{B}] \} dV = 0$$

Это возможно лишь, при отличном от нуля объеме интегрирования, когда подынтегральное выражение равно нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{P}_0 + [\mathbf{D} \mathbf{B}] \} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_0 + [\mathbf{D} \mathbf{B}] = const$$

Мы получили ЗСКД в замкнутой системе, содержащей заряженные частицы и электромагнитное поле. Отсюда следует, что электромагнитное поле обладает импульсом, плотность которого определяется по формуле

$$\vec{P}_{эл/м} = [\vec{E} \vec{B}]$$

Из сравнения с выражением для вектора Умова – Пойнтинга следует, что векторы объемной плотности количества движения электромагнитного поля и вектор Умова-Пойнтинга пропорциональны и параллельны:

$$\vec{P}_{эл/м} \uparrow\uparrow \vec{S}.$$