

ГЛАВА 3. Постоянный ток

Электрическим током называют всякое направленное движение электрических зарядов. Если направление движения не изменяется, то такой ток называется однопроводным. Если к тому же его величина не изменяется, то он называется постоянным. Максвелл помимо тока проводимости ввёл ещё ток смещения, плотность которого

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Из эксперимента известно, что $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, где $\vec{P}$ – электрический момент единицы объёма, в частности, электрический момент одиночного заряда равен: $\vec{p} = e\vec{r}$. Предыдущее выражение можно записать так:

$$\vec{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Следовательно, плотность тока смещения состоит из двух частей. Второе слагаемое связано с перемещением зарядов, первый же член определяет плотность тока смещения вне зависимости от движения зарядов. Общим свойством всех токов является то, что вокруг них существует магнитное поле.

Будем рассматривать постоянный ток и его магнитное поле. Таким образом, в полной системе уравнений Максвелла должны отсутствовать переменные во времени члены процессов. Следовательно, уравнения Максвелла принимают вид:

I уравнение: $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}; \oint \vec{H} d\vec{l} = I.$

II уравнение: $\text{rot} \vec{E} = 0; \oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$

III уравнение: $\text{div} \vec{B} = 0; \oint \vec{B}_n dS = 0.$

IV уравнение: $\text{div} \vec{D} = Q; \oint \vec{D} d\vec{S} = Q.$

V уравнение: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}.$

VI уравнение: $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}.$

VII уравнение: $\text{div} \mathbf{j} = 0$; $\oint \mathbf{j}_n dS = 0$

VIII уравнение: $\mathbf{j} = s \left(\mathbf{\dot{E}} + \mathbf{\dot{E}}^{emp} \right)$; $I = \frac{e}{R+r}$.

Уравнения II, IV и V описывали и электростатическое поле, поэтому все результаты, за исключением одного, которые были получены в разделе электростатики, справедливы и для описания электрического поля постоянного тока. Отличным является лишь следующее условие: в электростатике внутри металлического проводника (тела) потенциал во всех точках один и тот же. Именно поэтому внутри металлического проводника в электростатике не возникает электрического тока. Для существования электрического тока должны быть два условия:

- 1) наличие носителей заряда;
- 2) наличие разности потенциалов (напряжения).

В электростатике металлическое тело в среднем нейтрально. Покажем, что в цепи постоянного тока проводник остаётся нейтральным. Дело в том, что до замыкания электрической цепи проводник будет нейтральным, при замыкании цепи через каждое поперечное сечение цепи в любом месте будет проходить одно и то же количество электричества, т. к. по определению мы рассматриваем постоянный ток.

Покажем различие между разностью потенциалов (напряжением) и падением напряжения. Воспользуемся II уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \mathbf{\dot{E}} d\mathbf{l} = 0.$$

В дальнейшем будем рассматривать только линейные токи. Токи называются линейными, если сечение цепи в любом месте во много раз меньше протяжённости цепи. Очевидно, что $\mathbf{\dot{E}} \uparrow \uparrow d\mathbf{l}$. Возьмём участок цепи, тогда

$$\int_1^2 \mathbf{\dot{E}} d\mathbf{l}.$$

Преобразуем это выражение для E . Во первых, $E = -|\nabla\phi|$ и

$$\int_1^2 E dl = -\int_1^2 \frac{\partial\phi}{\partial l} dl = \phi_1 - \phi_2.$$

Далее, воспользуемся VIII уравнением Максвелла:

$$\mathbf{j} = s (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cmp}),$$

где $\mathbf{E}^{cmp}$ – напряжённость поля сторонних сил, т. е. электрического поля, созданного сторонним источником (аккумулятор, гальванический элемент, генератор, фотоэлемент и т. д.). Откуда

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{s} - \mathbf{E}^{cmp}.$$

Учитывая, что рассматриваем случай линейных токов, запишем:

$$E = \frac{j}{s} - E^{cmp}.$$

Итак,

$$\int_1^2 E dl = \phi_1 - \phi_2 \text{ и } \int_1^2 E dl = -\int_1^2 \frac{j}{\delta} dl - \int_1^2 E^{cmp} dl.$$

Так как

$$\int_1^2 E^{cmp} dl = \mathcal{E}_{12}^{cmp} \text{ и } \int_1^2 \frac{j}{\delta} dl = JR_{12},$$

то

$$JR_{12} = \mathcal{E}_{12}^{cmp} + (\phi_1 - \phi_2),$$

где JR_{12} называется падением напряжения, а $(\phi_1 - \phi_2)$ – напряжением, или разностью потенциалов.

Следовательно, падение напряжения и напряжение – это не синонимы. Только в том случае, когда $\mathcal{E}_{12}^{cmp} = 0$, падение напряжения и напряжение на участке численно равны.

§1. Векторный потенциал

Ранее мы получали уравнение Даламбера для векторного потенциала:

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \epsilon_0 m m_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -m m_0 \vec{j}.$$

Т. к. мы рассматриваем стационарные процессы, то второй член можно отбросить:

$$\Delta \vec{A} = -m m_0 \vec{j}.$$

Сравним это уравнение Пуассона с уравнением Пуассона для скалярного потенциала:

$$\Delta j = -\frac{r}{\epsilon \epsilon_0},$$

решением которого является выражение $j = \frac{1}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \int \frac{r}{r} dV$. Сравнивая правые части уравнений для $\vec{A}$ и j , можно написать решение уравнения Пуассона для векторного потенциала:

$$\vec{A} = \frac{m m_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dV.$$

Откуда можно сделать вывод, что векторный потенциал $\vec{A}$ направлен вдоль плотности тока $\vec{j}$. Т. к. мы рассматриваем линейные токи, то напомним выражение векторного потенциала для линейных токов, учитывая, что направление тока и направление проводника совпадают:

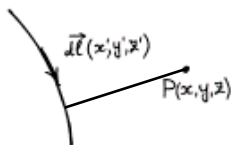
$$\vec{j} dV = \vec{j} S dl = I d\vec{l}.$$

Для линейных постоянных токов выражение для векторного потенциала запишется так:

$$\vec{A} = \frac{m m_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r}.$$

Векторный потенциал вводится для упрощения решения уравнений Максвелла. Но векторный потенциал – это вспомогательная величина. Как и скалярный потенциал, векторный потенциал физического смысла не имеет. Физический смысл имеет вектор магнитной индукции. Всё это следует из того, что любая физическая величина должна одновременно удовлетворять следующим признакам: должна иметь наименование, быть конечной и измеримой, о чём уже говорилось выше.

Ранее мы ввели векторный потенциал при помощи равенства $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$.



Сделаем вспомогательный чертёж.

Как видим из чертежа

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$$

является функцией от нештрихованных координат, а

$$\vec{j} = \vec{j}(x', y', z')$$

есть функция от штрихованных координат.

Точка наблюдения характеризуется нештрихованными координатами, а элементы тока – штрихованными координатами. Запишем формулу векторного потенциала, указав зависимость от координат:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{mm_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x', y', z')}{r(x, y, z, x', y', z')} dV(x', y', z').$$

r – расстояние от точки наблюдения до элемента тока, оно зависит от штрихованных и не штрихованных координат:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Интегрирование ведётся по области нахождения тока. Операцию ротора в формуле нужно брать по нештрихованным координатам:

$$\vec{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \frac{\vec{j}(\mathbf{r}')}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^3} dV(\mathbf{r}').$$

Мы поменяли порядок дифференцирования и интегрирования, т. к. они проводятся по разным переменным.

Воспользуемся формулой векторного анализа, учитывая, что операция ротора берётся по нештрихованным координатам, а $\vec{j}$ зависит от штрихованных координат:

$$\text{rot} \frac{\vec{j}}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{j} + \left[\text{grad} \frac{1}{r}, \vec{j} \right] = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \vec{j} \right] = - \frac{[\vec{r}, \vec{j}]}{r^3} = \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3}.$$

При замене порядка множителей появляется знак минус, поэтому последнее равенство будет без минуса.

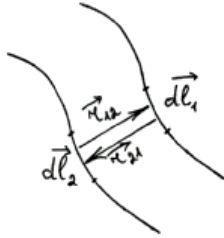
$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV$$

Мы получили **формулу Био-Савара-Лапласа**.

Запишем выражение для векторного потенциала и для вектора магнитной индукции применительно к линейным токам:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dV = \left| \begin{array}{l} dV = d\vec{l}S \\ \vec{j}dV = \vec{j}d\vec{l}S \\ \vec{j}d\vec{l}S = Id\vec{l} \end{array} \right| = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{r} \\ \vec{B} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \end{aligned}$$

§2. Взаимодействие элементов линейных токов



Воспользуемся магнитной частью формулы Лоренца: плотность механической силы равна

$$\vec{f}_M = q[\vec{r}\vec{B}].$$

Здесь q – величина заряда в единице объёма, т. е. $q = r$, тогда

$$\vec{f}_M = r[\vec{r}\vec{B}].$$

Проверим, что $r\vec{v}$ по наименованию совпадает с $\vec{j}$, т. е. $[r\vec{v}] = [\vec{j}]$:

$$\frac{Kл}{м^3} \frac{м}{с} = \frac{А}{м^2}; \quad \frac{А \cdot с}{м^2 \cdot с} = \frac{А}{м^2}, \text{ получаем } \frac{А}{м^2} = \frac{А}{м^2}.$$

Таким образом, можно записать

$$\vec{f}_M = [j\vec{B}].$$

Умножим это равенство на dV :

$$d\vec{F}_M = [j\vec{B}]dV.$$

Мы получили общую формулу для расчёта силы $d\vec{F}_M$. Но при рассмотрении взаимодействия двух элементов токов, под $d\vec{B}$ нужно понимать не интегральную индукцию, а только ту часть, которую даёт элемент первого тока в месте нахождения элемента второго тока.

Запишем последнюю формулу для линейного тока:

$$d\vec{F}_M = [j d\vec{B}]dV = [j d\vec{B}]dS = I[d\vec{\ell} d\vec{B}].$$

$d\vec{B}$ – это не дифференциал, а часть общей индукции. Расставим в полученной формуле индексы, характеризующие элементы токов; если рассмотреть воздействие элемента первого тока на элемент второго, то

$$d\dot{F}_M^{21} = I_2 \left[d\dot{l}_2 d\dot{B}_1 \right] \quad (1)$$

Воспользуемся формулой Био-Савара-Лапласа для суммарной индукции линейного тока:

$$\dot{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{[d\dot{l} \dot{r}]}{r^3},$$

получим

$$d\dot{B} = \frac{mm_0}{4p} I \frac{[d\dot{l} \dot{r}]}{r^3}.$$

Мы получили формулу для индукции элемента тока. Формула для индукции элемента первого тока в месте нахождения второго тока будет иметь вид:

$$d\dot{B}_1 = \frac{mm_0}{4p} I_1 \frac{[d\dot{l}_1 \dot{r}_{21}]}{r_{21}^3}.$$

Если это выражение подставить в формулу (1), то получим:

$$d\dot{F}_M^{21} = \frac{mm_0}{4p} I_1 I_2 \left[d\dot{l}_2 \frac{[d\dot{l}_1 \dot{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right] = \frac{mm_0}{4p} I_1 I_2 \frac{1}{r_{21}^3} [d\dot{l}_2 [d\dot{l}_1 \dot{r}_{21}]].$$

Соответственно мы можем написать выражение для $d\dot{F}_M^{12}$:

$$d\dot{F}_M^{12} = \frac{mm_0}{4p} I_1 I_2 \frac{1}{r_{12}^3} [d\dot{l}_1 [d\dot{l}_2 \dot{r}_{12}]].$$

Используя формулу векторной алгебры $[\dot{a}[\dot{b}\dot{c}]] = \dot{b}(\dot{a}\dot{c}) - \dot{c}(\dot{a}\dot{b})$, легко можно показать, что $d\dot{F}_M^{12} \neq d\dot{F}_M^{21}$ ни по модулю, ни по направлению. Однако существуют частные случаи, когда III закон механики выполняется и для элементов тока. Это случай, когда элементы $d\dot{l}_2$ и $d\dot{l}_1$ параллельны или антипараллельны.

Читателю предоставляется самостоятельно проверить случай, когда один из элементов тока перпендикулярен другому элементу и получить неожиданный результат, над которым стоит подумать.

§3. Энергия магнитного поля постоянного тока

Ниже будет показано, что плотность магнитной энергии рассчитывается по формуле:

$$w = \frac{mm_0 H^2}{2}.$$

Преобразуем формулу с помощью VI уравнения Максвелла $\dot{\vec{B}} = mm_0 \dot{\vec{H}}$ и выражения $H^2 = \dot{\vec{H}} \dot{\vec{H}}$:

$$w = \frac{\dot{\vec{H}} \dot{\vec{B}}}{2}.$$

Умножим обе части последнего выражения на dV и проинтегрируем по всему объёму нахождения магнитного поля, тогда

$$W = \frac{1}{2} \int \dot{\vec{H}} \dot{\vec{B}} dV.$$

Воспользуемся формулой $\dot{\vec{B}} = \text{rot} \dot{\vec{A}}$, получим:

$$W = \frac{1}{2} \int \dot{\vec{H}} \text{rot} \dot{\vec{A}} dV.$$

Используем следующую формулу векторного анализа:

$\text{div}[\dot{\vec{H}} \dot{\vec{A}}] = \dot{\vec{H}} \text{rot} \dot{\vec{A}} - \dot{\vec{A}} \text{rot} \dot{\vec{H}}$, $\dot{\vec{H}} \text{rot} \dot{\vec{A}} = \text{div}[\dot{\vec{H}} \dot{\vec{A}}] + \dot{\vec{A}} \text{rot} \dot{\vec{H}}$, подставим эти формулы в выражение для W и получим:

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \int \text{div}[\dot{\vec{H}} \dot{\vec{A}}] dV + \int \dot{\vec{A}} \text{rot} \dot{\vec{H}} dV \right\}.$$

Мы интегрируем по всему объёму, где есть магнитное поле. Следовательно, первый член даст нуль, т. к. за пределами интегрирования истечения магнитного поля не будет. Это легко показать, если воспользоваться теоремой Гаусса и перейти от интеграла по объёму к интегралу по поверхности:

$$\int \text{div}[\dot{\vec{H}} \dot{\vec{A}}] dV = \oint [\dot{\vec{H}} \dot{\vec{A}}]_n dS = 0.$$

Итак,

$$W = \frac{1}{2} \int \dot{\vec{A}} \text{rot} \dot{\vec{H}} dV.$$

Воспользуемся I уравнением Максвелла для постоянного тока:

$\text{rot} \overset{\mathbf{r}}{H} = \overset{\mathbf{r}}{j}$, тогда:

$$W = \frac{1}{2} \int \overset{\mathbf{r}}{A} \overset{\mathbf{r}}{j} dV.$$

Воспользуемся полученной выше формулой для векторного потенциала:

$$\overset{\mathbf{r}}{A} = \frac{mm_0}{4p} \int \frac{\overset{\mathbf{r}}{j}'}{r} dV'.$$

$\overset{\mathbf{r}}{j}' \equiv \overset{\mathbf{r}}{j}$, $dV' \equiv dV$; штрих используется только для того, чтобы последовательно брать два трёхкратных интеграла. Тогда получим:

$$W = \frac{mm_0}{8p} \int \int \frac{\overset{\mathbf{r}}{j} \overset{\mathbf{r}}{j}'}{r} dV dV'.$$

Преобразуем эту формулу для случая линейных токов.

$$\overset{\mathbf{r}}{j} dV = I d\overset{\mathbf{r}}{l}, \quad \overset{\mathbf{r}}{j}' dV' = I' d\overset{\mathbf{r}}{l}', \quad \text{где } I \equiv I'.$$

Тогда после подстановки получим:

$$W = \frac{1}{2} \frac{mm_0}{4p} I^2 \oint \oint \frac{d\overset{\mathbf{r}}{l} d\overset{\mathbf{r}}{l}'}{r}.$$

$\oint$ указывает на то, что ток в цепи при прочих необходимых условиях будет лишь в случае замкнутости этой цепи.

Коэффициент $L = \frac{mm_0}{4p} \oint \oint \frac{d\overset{\mathbf{r}}{l} d\overset{\mathbf{r}}{l}'}{r}$ называется коэффициентом самоиндукции. Исходя из этого, получим:

$$W = \frac{1}{2} I^2 L,$$

где коэффициент L зависит как от свойств среды, так и от геометрии проводника (т. е. от $\oint \oint \frac{d\overset{\mathbf{r}}{l} d\overset{\mathbf{r}}{l}'}{r}$).