ГЛАВА 2. *Электростатика*

Электростатика – это раздел электродинамики, в котором рассматриваются электромагнитные процессы, не изменяющиеся во времени. Точнее, т. к. заряды считаются неподвижными, то в СО, связанной с зарядами, существует только одно электрическое поле. Магнитного поля в электростатике нет, нет электрических токов, ни тока проводимости, ни тока смещения. Следовательно, согласно определению электростатики для описания всех электростатических процессов будут использоваться упрощённые уравнения Максвелла, за которыми мы сохраним их нумерацию. Таким образом, от полной системы уравнений Максвелла для описания электростатических явлений останутся следующие равенства:

II уравнение: $rot\vec{E} = 0$; $\oint E_l dl = 0$

И интегральная, и дифференциальная формы записи этого уравнения выражают одно и то же, но для различных геометрических объёмов (поверхностей, контуров). II уравнение в электростатике утверждает, что электростатическое поле безвихревое. Интегральная форма показывает, что полная работа по замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю. Говорят, что электростатическое поле – потенциальное поле и для его описания можно ввести, наряду с силовой характеристикой вектором $\vec{E}$, потенциальную, энергетическую характеристику – разность потенциалов, что и будет сделано ниже.

IV уравнение: $div\vec{D} = r$; $\oint \vec{D}d\vec{S} = Q$.

V уравнение: $\vec{D} = ee_0\vec{E}$.

Остальные уравнения Максвелла в электростатике не используются.

Напишем уравнение Даламбера для скалярного потенциала:

$$\Delta j - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{ee_0}.$$

В электростатике рассматриваются статические процессы, поэтому уравнение Даламбера упрощается:

$$\Delta j = -\frac{r}{ee_0}$$

Это есть уравнение Пуассона, оно справедливо в области нахождения зарядов. Если рассматривается область вне зарядов, то $r = 0$ и получаем уравнение Лапласа.: $\Delta j = 0$.

И уравнение Пуассона, и уравнение Лапласа имеют строгое математическое решение, поэтому напишем готовое решение уравнения Пуассона:

$$j = \frac{1}{4pee_0} \int \frac{r}{r} dV + const .$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий. Но, как было объяснено ранее (см. смысл скалярного и векторного потенциала), скалярный потенциал является неоднозначной функцией, поэтому физического смысла не имеет. Физический смысл имеет разность потенциалов, которая численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда между точками, разность потенциалов между которыми определяется. Существуют специальные приборы для определения разности потенциалов: электрометр, вольтметр. Выбор постоянной, равной С, произволен в силу неоднозначности скалярного потенциала, поэтому можно положить С=0 в любой точке мирового пространства. Часто за такую точку принимается бесконечно далёкая точка, в электротехнике эта точка находится на поверхности Земли, в радиотехнике – совпадает с точкой на шасси. Поэтому, договорившись о выборе точки нулевого потенциала, мы автоматически получаем разность потенциалов. Следовательно, только разность потенциалов имеет физический смысл. Этому вопросу посвящена статья Г. А. Розмана “Имеет ли скалярный потенциал физический смысл”, которая изложена в журнале “Учебная физика” 2000 г., № 6, 20-24.*

В вопросе “Введение векторного и скалярного потенциала” в главе 1 была получена следующая формула:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla j .$$

В электростатике $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, следовательно

$$\vec{E} = -\nabla j .$$

---

* См. также Г.А.Розман Избранное по методике преподавания физики в средней школе. ПГПИ, 2002, с.76

При составлении ∇j произвольная постоянная С исчезает. Следовательно, величина $\vec{E}$ является физической величиной. Она однозначна (в каждой точке поля имеет одно определённое значение), измерима по силовому воздействию на пробный электрический заряд. Напряжённость поля $\vec{E}$ - силовая характеристика поля.

Ранее мы получили граничные условия для векторов поля. Т. к. для описания электростатического поля используются только два вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$, где $\vec{D} = ee_0\vec{E}$, то граничные условия этих векторов сохраняются и в электростатике. Но здесь появляются дополнительные граничные условия, если учесть соотношение между $\vec{E}$ и ∇j .

Используя граничные условия для $\vec{E}$, можно получить и поведение скалярного потенциала j на границе раздела двух сред. При этом следует обратить внимание на то, что

$$E_n = -\frac{\partial j}{\partial n}; \; E_t = -\frac{\partial j}{\partial t}.$$

Составим эти производные на границе раздела двух сред, используя поведение E_n и E_t на этой же границе.

$$E_{2n} = -\frac{\partial j_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial j_1}{\partial n_1} = E_{1n}$$

Из этой формулы следует непрерывность первой производной от потенциала по направлению нормали при условии отсутствия поверхностных зарядов. Абсолютно так же можно получить непрерывность первой производной от потенциала по касательной:

$$E_{2t} = -\frac{\partial j_2}{\partial t_2} = -\frac{\partial j_1}{\partial t_1} = E_{1t}.$$

Существует ещё одно граничное условие для поведения скалярной функции. Выбрав нулевую точку отсчёта для скалярного потенциала, мы для значения скалярного потенциала на границе раздела двух сред получим величину, которую выше определили как численно равную работе по перемещению единичного заряда. Но, перемещая заряд из выбранной точки по любому пути в данную точку границы раздела, мы будем совершать одну и ту же работу. Следовательно, к предыдущим граничным условиям добавится ещё одно:

$$j_2 = j_1,$$

справедливое на границе раздела двух сред.

§1. Механические силы в электростатике

Для описания электростатического поля используются две силовые характеристики: напряжённость поля $\vec{E}$ и механическая сила $\vec{F}$. Мы ввели напряжённость поля независимо от механической силы $\vec{F}$, используя скалярный потенциал. Но по своему смыслу напряжённость поля непосредственно связана с силой $\vec{F}$: напряжённость электростатического поля – это физическая величина, численно равная величине силы, которую испытывает единичный положительный заряд, помещённый в данную точку поля.

Если $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$, то $\vec{F} = q\vec{E} = \dfrac{1}{4pee_0}\dfrac{qQ}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$,

где Q – заряд, окружённый своим полем, q – заряд, испытывающий действие этого поля. Таким образом, получаем:

$$\vec{E} = \frac{1}{4pee_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Убедимся, что силовые характеристики в электростатическом поле подчиняются III закону Ньютона.

Рассмотрим $\vec{r}_{21}$, здесь первый индекс указывает, к какому заряду направлен вектор, а второй – от какого идёт этот вектор. Запишем выражение для силы, которую испытывает второй заряд со стороны поля первого заряда:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4pee_0}\frac{qQ}{r^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}.$$

Составим выражение для силы, которую испытывает первый заряд со стороны поля второго:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4pee_0}\frac{qQ}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.$$

Сопоставляя эти два выражения, получаем:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

что и утверждает III закон Ньютона.

Следовательно, электростатические силы есть ньютоновские силы.

§2. Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

Пусть имеется система точечных зарядов. Если в данной задаче мы выберем значение потенциала равно нулю в бесконечности, то поместим эту систему зарядов в бесконечность. Будем считать, что заряды находятся так далеко, что, перемещая первый заряд из бесконечности в некоторую точку пространства, мы не будем совершать никакой работы (против электрических сил).

Вокруг первого перенесённого заряда существует его электростатическое поле, и, если мы будем переносить из бесконечности второй заряд, то при этом будет совершаться работа. Подсчитаем величину совершённой работы:

$$A_{21} = q_2 j_{21},$$

где q_2 – переносимый заряд, а j_{21} - разность потенциалов между точками, одна из которых находится в бесконечности, а другая – в месте перемещения второго заряда. Учитывая смысл разности потенциалов (это физическая величина, численно равная работе по перемещению единичного положительного заряда из одной точки в другую точку поля другого заряда), перенесём не единичный заряд, а q_2. Следовательно, на перемещение этого заряда нужно затратить работу A_{21}.

Унесём оба заряда в бесконечность, и сначала в свою точку перенесём второй заряд. Т. к. перенос совершается в отсутствии других полей, то никакой работы не совершается. Далее в поле второго заряда перенесём первый в своё местоположение. Будет совершена работа:

$$A_{12} = q_1 j_{12}.$$

Обе работы должны быть равны друг другу, в противном случае был бы возможен вечный двигатель первого рода.

Оба заряда, взаимодействуя друг с другом, будут обладать потенциальной энергией. Поэтому можно написать выражение для энергии системы двух зарядов:

$$W_{1,2} = \frac{1}{2}\left(A_{21} + A_{12}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k=1}^{2} q_i j_{ik}.$$

Если мы перенесём поочерёдно три заряда и будем менять порядок их очерёдности перемещения, то получим следующее выражение для энергии системы этих трёх зарядов q_1, q_2, q_3:

$$W_{1,2,3} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k=1}^{3} q_i j_{ik} \ .$$

Если переносятся n зарядов, то они будут обладать энергией:

$$W_n = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k=1}^{n} q_i j_{ik}$$

Знак энергии W зависит от соотношения величин положительных и отрицательных зарядов, от расположения их относительно друг друга. Так что W может быть как положительной, так и отрицательной величиной, а также равной нулю.

Мы подсчитали энергию взаимодействия системы точечных зарядов.

§3. Энергия непрерывно распределённых зарядов

Выше мы получили выражение для энергии системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k=1}^{n} \frac{q_i q_k}{4pee_0 r_{ki}} \ .$$

Т. к. заряды могут быть разных знаков, то может быть такое их сочетание и расположение, что $W \lesseqgtr 0$.

Обобщим полученную формулу на случай непрерывно распределённых зарядов. Предварительно придадим исходной формуле эквивалентный вид.

Пусть φ_{ki} - потенциал в точке нахождения k-ого заряда в поле i-ого заряда (здесь предполагается, что потенциал в бесконечности равен нулю – условие нормировки);

$$j_{ki} = \frac{q_i}{4pee_0 r_{ki}} \ ,$$

тогда

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i \neq k=1}^{n} q_k \varphi_{ki} \ .$$

Будем рассматривать непрерывно распределённые заряды. Введём плотность распределения этих зарядов r, тогда в некотором элементарном объёме dV будет находиться заряд dq. Тогда предыдущая формула запишется так:

$$W = \frac{1}{2}\int r\, j\, dV ,$$

где $r = r(x, y, z)$, $j = j(x, y, z)$.

Мы получили формулу, с помощью которой можно рассчитывать энергию непрерывно распределённых зарядов.

Придадим этой формуле иной эквивалентный вид. Воспользуемся IV уравнением Максвелла в дифференциальной форме:

$$div\vec{D} = r ,$$

которое утверждает, что источником силовых линий являются заряды.

Сделаем подстановку:

$$W = \frac{1}{2}\int j\, div\vec{D} dV .$$

Воспользуемся формулой векторного анализа:

$$div\left(j\vec{D}\right) = j\, div\vec{D} + \vec{D} grad\, j ,$$

из которой следует, что

$$j\, div\vec{D} = div\left(j\vec{D}\right) - \vec{D} grad\, j .$$

Получаем, что

$$W = \frac{1}{2}\int div(j\vec{D}) dV - \frac{1}{2}\int \vec{D} grad\, j\, dV .$$

Распространим интегрирование в первом члене на всю область, в которой существует электрическое поле. Для большей убедительности заменим первый интеграл интегралом по поверхности, используя теорему Остроградского-Гаусса:

$$\int div(j\vec{D}) dV = \oint (j\vec{D})_n\, dS = 0 ,$$

так как за пределами объема поля нет и $D_n = 0$.

Тогда

$$W = -\frac{1}{2}\int \vec{D} grad\, j\, dV .$$

Воспользуемся формулой, с помощью которой вводится скалярный потенциал: $\vec{E} = -grad\, j$, тогда

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\vec{E}dV .$$

Эта формула основана на реальном существовании электростатического поля, независимо от его природы.

Покажем, что энергия непрерывно распределённых зарядов (энергия электростатического поля) есть величина всегда положительная (хотя иногда может равняться нулю). Согласно V уравнению Максвелла $\vec{D} = ee_0\vec{E}$, получаем:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \int E^2 dV \geq 0 .$$

Пусть $w = \dfrac{ee_0E^2}{2}$ - объёмная плотность электростатической энергии, тогда

$$W = \int wdV \qquad (*)$$

Рассмотрим случай, когда электростатическое поле слагается из двух электростатических полей, т. е. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2$$

Помножим последнее равенство на $\frac{1}{2}ee_0$ и подставим в (*):

$$\frac{1}{2}ee_0\int E^2 dV = \frac{1}{2}ee_0\int E_1^2 dV + \frac{1}{2}ee_0\int E_2^2 dV + \frac{1}{2}ee_0\int 2\vec{E}_1\vec{E}_2 dV .$$

Слева получили выражение для полной энергии системы двух полей, которые находятся в одном и том же объёме. Первое слагаемое справа есть энергия первого поля. Второй член – энергия второго поля, третий – энергия взаимодействия полей, т. к. электростатические поля – материальные объекты и они могут взаимодействовать друг с другом. Покажем, что суммарная собственная энергия полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ больше или, в крайнем случае, может быть равна энергии взаимодействия этих полей. Для этого рассмотрим следующее выражение:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2\vec{E}_1\vec{E}_2 \geq 0 ,$$

т. к. слева стоит величина большая, либо равная нулю, то

$$E_1^2 + E_2^2 \geq 2\vec{E}_1\vec{E}_2 .$$

Если помножить последнее неравенство на $\frac{1}{2}ee_0$ и проинтегрировать по области нахождения полей, то

$$\frac{1}{2}ee_0\int E_1^2 dV + \frac{1}{2}ee_0\int E_2^2 dV \geq \frac{1}{2}ee_0\int 2\vec{E}_1\vec{E}_2 dV ,$$

или

$$W_1 + W_2 \geq W_{12}.$$

Обратим внимание на то, что результаты, полученные в §2 и §3 не противоречат друг другу. В §2 мы рассчитали потенциальную энергию взаимодействия системы точечных зарядов. В §3 полная энергия результирующего поля включает в себя не только энергию взаимодействия полей, но и их собственную энергию. Электростатическое поле выступает как вид материи, обладающей собственной энергией.