

§ 10. Векторный и скалярный потенциалы

Уравнения Максвелла – это, в общем случае, сложные интегрально-дифференциальные уравнения, поэтому непосредственно их решать относительно трудно. Были введены две вспомогательные функции: векторный и скалярный потенциалы, благодаря которым все уравнения Максвелла сводились к одному – уравнению Даламбера.

Так как векторный и скалярный потенциалы – вспомогательные функции, то это означает, что они физического смысла не имеют. Это и будет показано дальше.

Введём векторный потенциал $\vec{A}$ следующим образом:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Такой способ введения сохраняет вихревой характер магнитного поля. Убедимся, что III уравнение Максвелла удовлетворяется таким выбором векторного потенциала. Покажем, что векторный потенциал не является физической величиной, т. к. вводится неоднозначно.

Величина называется физической, если она: 1) однозначна, 2) измерима, 3) конечна. Действительно:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Прибавим к векторному потенциалу $\vec{A}$ некоторую постоянную величину:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } j_0.$$

Убедимся, что $\vec{A}'$ определяет то же самое магнитное поле:

$$\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad } j_0) = \text{rot} \vec{A} + \text{rot grad } j_0 = \text{rot} \vec{A} = \vec{B}.$$

Получаем, что

$$\vec{B}' \equiv \vec{B}.$$

Итак, физический смысл имеет вектор магнитной индукции, а векторный потенциал – вспомогательная математическая функция, которую мы ввели для упрощения математических расчётов, что будет видно далее. Введём вспомогательную величину – скалярный потенциал. Для этого воспользуемся II уравнением Максвелла в интегральной форме, куда вместо $\vec{B}$ подставим векторный потенциал, а затем воспользуемся теоремой Стокса:

$$\oint \mathbf{r} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r} \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S} = -\int \text{rot} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) d\mathbf{S} = -\oint \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Перенесём правую часть налево и объединим два интеграла:

$$\oint \left(\mathbf{r} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\mathbf{l} = 0.$$

Покажем, что значение интеграла не изменится, если к подынтегральной функции прибавить полный дифференциал некоторой произвольной функции. Обозначим эту функцию Φ , тогда полный дифференциал:

$$dj = \frac{\partial j}{\partial l} \mathbf{l}_0 d\mathbf{l},$$

$\frac{\partial j}{\partial l}$ - скорость изменения Φ по l (в направлении l), $\mathbf{l}_0$ - единичный орт

этого направления $d\mathbf{l}$. Проверим, что это действительно является полным дифференциалом. Составим условие полного дифференциала (интеграл по замкнутому контуру должен равняться нулю):

$$\oint dj = \oint \frac{dj}{dl} \mathbf{l}_0 d\mathbf{l} = \oint \frac{dj}{dl} \left| \mathbf{l}_0 \right| \left| d\mathbf{l} \right| \cos \alpha = \oint \frac{dj}{dl} dl = \oint dj = 0,$$

где α - угол между $\mathbf{l}_0$ и $d\mathbf{l}$, а $\frac{dj}{dl} \mathbf{l}_0 = \nabla j$. Таким образом, прибавление

$\text{grad} j$ не даст изменения:

$$\oint \left(\mathbf{r} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla j \right) d\mathbf{l} = 0.$$

Так как контур интегрирования не равен нулю, то интеграл будет равен нулю в том случае, когда подынтегральное выражение равно нулю. Следовательно:

$$\mathbf{r} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla j.$$

Мы связали физическую величину $\vec{E}$ со вспомогательными величинами $\vec{A}$ и Φ . Покажем, что введённая нами вспомогательная Φ (скалярный потенциал) неоднозначна, а, следовательно, согласно определению физической величины, скалярный потенциал – не физическая, а вспомогательная величина. Далее будет показано, как с помощью этой вспомогательной величины получается более простая возможность математического решения уравнения Максвелла. Действительно, пусть вместо j введём j' такое, что $j' = j + j_0$, где $j_0 = \text{const}$ есть произвольная величина. Составим $\nabla j'$:

$$\nabla j' = \nabla(j + j_0) = \nabla j + \nabla j_0.$$

Так как $j_0 = \text{const}$ и не может изменяться по своему смыслу, то

$$\nabla j' = \nabla j.$$

Покажем, что физический смысл имеет не сам скалярный потенциал, а разность потенциалов. Пусть имеем

$$j'_1 = j_1 + j_0 \text{ и } j'_2 = j_2 + j_0.$$

Составим их разность:

$$j'_2 - j'_1 = (j_2 + j_0) - (j_1 + j_0) = j_2 + j_0 - j_1 - j_0 = j_2 - j_1.$$

Таким образом, разность потенциалов однозначно определяет состояние электрического поля в двух его точках. Любую точку электрического поля можно принять за точку, в которой потенциал равен нулю, тогда, говоря о потенциале других точек поля, мы по сути дела всегда будем иметь в виду разность потенциалов между этими точками и той, потенциал которой мы условно приняли за нуль. Обычно в теоретической физике условно за нулевой потенциал принимается потенциал бесконечно далёкой точки. В электротехнике за точку нулевого потенциала принимают потенциал Земли, в радиотехнике – потенциал шасси приемника. Из сказанного выше видно, что приписывание выделенным точкам значения нулевого потенциала не означает, что в этих точках потенциал равен нулю. Он может иметь любое значение, т. к. при составлении разности потенциалов значение потенциала в данной точке автоматически исключается из расчётов (в нашем случае это было j_0).

§ 11. Уравнение Даламбера

Воспользуемся I уравнением Максвелла в дифференциальной форме $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, а также V и VI уравнениями $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$, которые подставим в I уравнение Максвелла. В результате получим:

$$\mathbf{rot}\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

Воспользуемся формулой, с помощью которой был введён векторный потенциал:

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}.$$

Также было получено
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

Подставим эти величины в уравнение (1):

$$\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{A} = \mu\mu_0 \mathbf{j} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi.$$

Воспользуемся формулой: $\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{A} = \nabla \mathbf{div}\mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$, тогда

$$\nabla \mathbf{div}\mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu\mu_0 \mathbf{j} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi.$$

В последнем члене справа изменим порядок дифференцирования. Сделаем перестановки членов и объединим два члена с операцией ∇ :

$$\nabla \left(\mathbf{div}\mathbf{A} + \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu\mu_0 \mathbf{j} = \Delta \mathbf{A} - \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Выше было доказано, что скалярный и векторный потенциалы – это неоднозначные вспомогательные функции, поэтому мы можем на них наложить ограничительные условия, воспользовавшись их неоднозначностью. Наложим на $\mathbf{A}$ и φ ограничительное калибровочное условие, которое называется **калибровочным условием Лоренца**:

$$\mathbf{div}\mathbf{A} + \epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Тогда равенство (2) примет вид:

$$\Delta \mathbf{A} - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -mm_0 \mathbf{j}.$$

Последнее равенство есть уравнение Даламбера для векторного потенциала.

§12. Вывод уравнения Даламбера для скалярного потенциала

Воспользуемся IV уравнением Максвелла в дифференциальной форме: $\text{div} \mathbf{\dot{D}} = r$, а V уравнение Максвелла $\mathbf{\dot{D}} = ee_0 \mathbf{\dot{E}}$ подставим в IV уравнение и получим:

$$\text{div} \mathbf{\dot{E}} = \frac{r}{ee_0}.$$

Если воспользоваться формулой для вывода скалярного потенциала:

$$\mathbf{\dot{E}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla j,$$

то будем иметь:

$$-\text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{div} \nabla j = \frac{r}{ee_0}.$$

Изменим порядок дифференцирования в первом члене слева:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} - \Delta j = \frac{r}{ee_0},$$

где $\text{div} \nabla j = (\nabla \nabla j) = (\nabla \nabla) j = \nabla^2 j = \Delta j$.

В первом члене слева заменим $\text{div} \mathbf{\dot{A}}$, используя калибровочное условие Лоренца:

$$\frac{\partial}{\partial t} ee_0 mm_0 \frac{\partial j}{\partial t} - \Delta j = \frac{r}{ee_0} \quad \text{или} \quad \Delta j - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{ee_0}.$$

Последнее равенство есть уравнение Даламбера для скалярного потенциала.

§13. Анализ уравнений Даламбера для векторного и скалярного потенциалов

Запишем эти уравнения Даламбера:

$$\Delta \mathbf{A} - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -mm_0 \mathbf{j} \quad \text{и} \quad \Delta j - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{ee_0}.$$

Векторное уравнение эквивалентно трём скалярным, полученным в результате проекции на оси координат:

$$\Delta A_x - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -mm_0 j_x,$$

$$\Delta A_y - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -mm_0 j_y,$$

$$\Delta A_z - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -mm_0 j_z,$$

$$\Delta j - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{ee_0}.$$

Все эти рассматриваемые уравнения с математической точки зрения однотипны, поэтому, если ввести обозначения

$$A_x \equiv f_1, \quad A_y \equiv f_2, \quad A_z \equiv f_3, \quad j \equiv f_4,$$

$$c_1 = mm_0 j_x, \quad c_2 = mm_0 j_y, \quad c_3 = mm_0 j_z, \quad c_4 = \frac{r}{ee_0},$$

тогда все уравнения Даламбера можно будет записать в виде одного:

$$\Delta f_i - ee_0 mm_0 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = -c_i, \quad i=1,2,3,4 \quad (1)$$

1 случай:

Если рассматривается область вдали от зарядов и токов, то $c_i \equiv 0$, уравнение (1) примет вид:

$$\Delta f_i - e e_0 m m_0 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = 0 \text{ - это волновое уравнение.} \quad (*)$$

Из этого уравнения Максвелл сделал вывод о существовании электромагнитных волн.

2 случай:

Потенциалы поля во времени изменяются медленнее, чем в пространстве, тогда вторым членом слева, по сравнению с первым членом, можно пренебречь. Получим стационарную задачу, решение которой связано с **уравнением Пуассона**:

$$\Delta f_i = -c_i.$$

Если же рассматривается стационарная задача вдали от зарядов и токов, то уравнение Пуассона переходит в **уравнение Лапласа**:

$$\Delta f_i = 0.$$

Запишем волновое уравнение для вакуума.

Чтобы записать уравнения Максвелла, калибровочное условие Лоренца или уравнения Даламбера для скалярного и векторного потенциала для вакуума, нужно во всех этих уравнениях положить $e = 1$ и $m = 1$ (в единицах СИ). Тогда:

$$\Delta f - e_0 m_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

В механике рассматривается теория волновых процессов, для их описания получается волновое уравнение, которое имеет вид:

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

где v - скорость распространения волнового процесса; следовательно, в нашем случае

$$e_0 m_0 = \frac{1}{c^2},$$

где c – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Последняя формула есть закон Максвелла. На основании этой формулы Максвелл утвердил электромагнитную природу света, т. е. он установил,

что световые волны имеют электромагнитную природу. Если рассмотреть волновое уравнение для любой вещественно среды (уравнение (*)), то получим

$$ee_0mm_0 = \frac{1}{v^2},$$

т. к. $e_0m_0 = \frac{1}{c^2}$, то $em = \frac{c^2}{v^2}$; а формула $\frac{c}{v} = n$ определяет показатель преломления. Учитывая всё это, получим один из законов физической оптики:

$$n = \sqrt{em}.$$

В большинстве диэлектрических сред $m \approx 1$, тогда $n = \sqrt{e}$, что справедливо в том случае, если электромагнитные колебания не совпадают с собственными частотами колебания атомов; формула справедлива вдали от собственно полосы поглощения.

Продолжим обсуждение задачи.

Будем рассматривать область на больших расстояниях от зарядов и токов. Тогда уравнение Даламбера упрощается, так как правая часть равна нулю и мы получаем волновое уравнение:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Область, в которой справедливо это уравнение называется волновой зоной. Очевидно, что функция Φ в волновой зоне не будет зависеть от углов Θ и Φ (если перейти к сферической системе координат). Тогда лапласиан запишется так:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r}.$$

Составим лапласиан от Φ :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}) = \frac{1}{r^2} \left\{ 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right\} = \\ &= \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Составим волновое уравнение:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку мы рассматривали поле в волновой зоне, то $r \neq 0$, следовательно, можем умножить на r :

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Объединим первые два члена $2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (\Phi r)}{\partial r^2}.$

А в третьем внесем под знак производной r . Тогда волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 (\Phi r)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\Phi r)}{\partial t^2} = 0.$$

Именно это уравнение называется волновым.

Можно показать, что решением этого однородного дифференциального уравнения второго порядка является функция:

$$\Phi \cdot r = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

(в скобках стоят не множители, а аргументы).

Откуда:

запаздывающий потенциал: $\Phi_1 = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r},$

опережающий потенциал: $\Phi_2 = \frac{f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}.$

Покажем происхождение названий этих потенциалов. Действительно, рассмотрим f_1 , в момент времени $t - \Delta t$. Тогда:

$$\begin{aligned} f_1\left(t_1 - \Delta t - \frac{r - v\Delta t}{v}\right) &= f_1\left(t_1 - \Delta t - \frac{r}{v} + \frac{v\Delta t}{v}\right) = \\ &= f_1\left(t_1 - \frac{r}{v}\right). \end{aligned}$$

Полученное выражение показывает, что физический процесс, связанный с потенциалом f_1 (и с Φ_1) распространяется в пространстве от места нахождения источников с конечной скоростью v , то есть значение потенциала в последующий момент времени и дальше от источника поля определяется значением потенциала в предыдущий момент времени и ближе к источнику.

Таким образом решение Φ_1 определяет удаляющийся волновой процесс, а Φ_2 - приближающийся к источникам поля волновой процесс.

Обобщим полное решение на область распределения зарядов и токов $r \rightarrow 0$.

Уравнение Даламбера вблизи зарядов и токов упрощается, так как не существует запаздывания и можно отбросить второй член. Получаем уравнение Пуассона, решение которого нам известно:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{x}{r} dV,$$

причем это решение справедливо и в окрестности $r = 0$.

Мы получим общее решение задачи, справедливое и в волновой зоне и вблизи источников поля, если запишем функциональную зависимость решения от времени t , которую мы определили для волновой зоны. Это можно сделать, так как вид f_1 и f_2 нами не был установлен.

Итак, полное решение уравнения Даламбера, справедливое для любой области пространства, будет иметь следующий вид:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{x \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV.$$

Обычно это выражение называют запаздывающим потенциалом.

§ 14. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

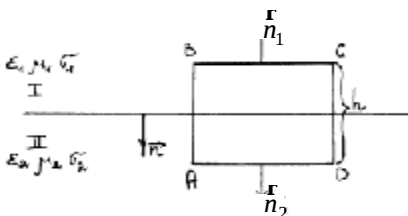
Уравнения Максвелла записаны для однородных изотропных сред. Об этом явно было сказано при составлении V и VI уравнений Максвелла (см. §8). Оказывается, характер поведения векторов поля на границе раздела двух однородных сред содержится в самих уравнениях Максвелла..

Граничные условия для нормальных компонент векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$.

Воспользуемся III уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$\oint \vec{B}_n dS = 0.$$

Оно утверждает, что линии вектора магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца.



Заменим резкую границу раздела двух сред слоем, в котором характеристики среды будут изменяться непрерывно. Введём общую нормаль к границе раздела двух сред и нормаль к сторонам вспомогательной фигуры. Применим теорему о среднем значении интеграла.

$$\int_{BC} \vec{B}_n dS + \int_{DA} \vec{B}_n dS + \int_{\text{бок. пов.}} \vec{B}_n dS = 0.$$

Пусть h – ширина переходного слоя. По теореме о среднем значении интеграла первый интеграл будет равен:

$$\int_{BC} \vec{B}_n dS = \bar{B}_{n_1} \Delta S.$$

Аналогично,

$$\int_{DA} \vec{B}_n dS = \bar{B}_{n_2} \Delta S; \quad \int_{\text{бок. пов.}} \vec{B}_n dS \sim h.$$

Устремим h к нулю, тогда вдоль боковой поверхности поток линий вектора магнитной индукции также будет равен нулю. Перейдём от

нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ к общей нормали $\vec{n}$. В результате будем иметь:

$$\vec{B}_{2n}\Delta S - \vec{B}_{1n}\Delta S = 0.$$

У второго члена появляется знак минус, т. к. нормаль $\vec{n}_1$ противоположно направлен относительно общей нормали $\vec{n}$. Перед индексом нормали стоит индекс той среды, в направлении которой рассматривается поток (с учётом знака общей нормали и нормали данной среды). У общей нормали индекса нет.

Устремим величину площадки выбранного переходного слоя к нулю $\Delta S \rightarrow 0$. Формально, с точки зрения математики, мы переходим к точке на границе раздела. В результате получаем, что

$$B_{2n} = B_{1n}.$$

Таким образом, получили, что нормальная проекция вектора магнитной индукции непрерывна при переходе границы раздела двух сред.

Воспользуемся VI уравнением Максвелла: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, тогда

$$m_2 m_0 H_{2n} = m_1 m_0 H_{1n}.$$

Исходя из этого равенства, рассмотрим два случая:

- 1) Если $m_1 = m_2$, то получаем, что нормальная проекция вектора $\vec{H}$ непрерывна при переходе границы раздела двух сред.
- 2) Если $m_1 \neq m_2$, то нормальные компоненты $\vec{H}$ испытывают скачок.

Поведение нормальных компонент векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ на границе раздела двух сред.

Для доказательства воспользуемся IV уравнением Максвелла в интегральной форме: $\oint \vec{D}_n dS = Q$. Здесь под Q понимается величина заряда, заключённого в объёме, охваченного поверхностью интегрирования.

Рассмотрим случай, когда $Q=0$. Этот случай аналогичен случаю, рассмотренному ранее, т. е.

$$D_{2n} = D_{1n} ,$$

что утверждает, что нормальная компонента вектора $\vec{D}$ в рассматриваемом случае на границе двух сред непрерывна. Из V уравнения Максвелла $\vec{D} = e e_0 \vec{E}$ следует, что в случае равенства $e_1 = e_2$, будет тот же результат и для нормальной компоненты вектора $\vec{E}$:

$$E_{2n} = E_{1n} .$$

Если $e_1 \neq e_2$, то нормальные компоненты вектора $\vec{E}$ испытывают скачок.

Рассмотрим случай, когда в заключённом объёме имеется заряд, т. е. $Q \neq 0$. Все преобразования, выполненные для вектора $\vec{B}$, остаются в силе и для вектора $\vec{D}$, за исключением члена, связанного с зарядом Q .

$$Q = \int r dV .$$

Применяя теорему о среднем значении интеграла, можно величину Q записать так:

$$Q = \bar{r} Sh .$$

При $h \rightarrow 0$ получим границу раздела двух сред, вместо объёмного распределения зарядов введем поверхностную плотность заряда. Обозначим эту величину w . Для поведения нормальной компоненты вектора $\vec{D}$ будем иметь

$$D_{2n} - D_{1n} = w .$$

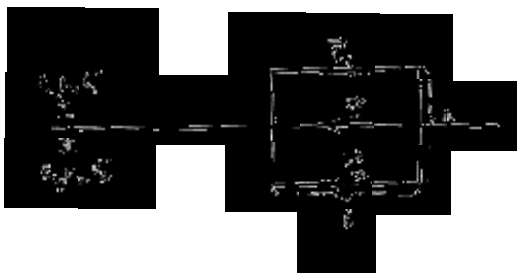
При $Q \neq 0$, нормальная компонента вектора $\vec{D}$ испытывает скачок. Если воспользоваться V уравнением Максвелла $\vec{D} = e e_0 \vec{E}$, то получим

$$e_2 e_1 E_{2n} - e_1 e_0 E_{1n} = w .$$

Нормальная компонента вектора $\vec{E}$ при $w \neq 0$ всегда испытывает скачок, даже если $e_1 = e_2$.

Поведение тангенциальных компонент векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ на границе раздела двух сред.

Как и в предыдущих случаях, заменим резкую границу раздела двух сред переходным слоем. В плоскости чертежа выберем контур интегрирования как показано на рисунке.



$\vec{t}_i (i=1,2)$, $\vec{t}$ - орты касательных к сторонам контура и к самой границе раздела.

Воспользуемся II уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$\oint E_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS.$$

Разобьём замкнутый контур обхода на участки:

$$\int_{н.с.} E_l dl + \int_{в.с.} E_l dl + 2 \int_{б.с.} E_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS.$$

Воспользуемся теоремой о среднем значении интеграла, тогда предыдущее равенство примет вид:

$$\bar{E}_{t_2} l + \bar{E}_{t_1} l + 2 \text{бок.см.}(\sim h) = - \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}_n h l.$$

Перейдём к общей касательной $\vec{t}$. Из чертежа следует, что

$$\vec{t}_2 = \vec{t} \text{ и } \vec{t}_1 = -\vec{t}.$$

В обозначениях общей касательной $\vec{t}$ предыдущее равенство запишется так:

$$\bar{E}_{2t} l - \bar{E}_{1t} l + 2 \text{бок.см.}(\sim h) = - \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}_n h l.$$

Устремим ширину переходного слоя h к нулю, в результате чего третий член и правая часть будут стремиться к нулю. Оставшееся выражение сократим на 1 и уберём знак среднего:

$$E_{2t} = E_{1t} ,$$

что говорит о непрерывности тангенциальной компоненты вектора $\vec{E}$ при переходе через границу раздела двух сред.

Примечание: когда мы переходим от касательных $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$ в каждой среде к общей касательной $\vec{t}$ на границе раздела двух сред, то, чтобы отметить, что проекции берутся либо в первой, либо во второй средах, мы индексы 1 и 2 ставим перед значком общей касательной $\vec{t}$.

Воспользуемся V уравнением Максвелла: $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$. Составим условие непрерывности проекции вектора $\vec{E}$ на касательную $\vec{t}$ границы раздела. Получим:

$$\frac{D_{2t}}{e_2 e_0} = \frac{D_{1t}}{e_1 e_0} .$$

Если $e_1 = e_2$, то $D_{1t} = D_{2t}$; если $e_1 \neq e_2$, то $D_{1t} \neq D_{2t}$.

Если воспользоваться I уравнением Максвелла и проделать аналогичные математические действия, то получим следующее равенство для тангенциальных компонент вектора $\vec{H}$:

$$H_{2t} - H_{1t} = i ,$$

где i – поверхностная плотность тока. Поверхностная плотность тока есть количество электричества, которое проходит за единицу времени через участок единичной длины, расположенный на поверхности раздела. При $i=0$ тангенциальная компонента вектора $\vec{H}$ непрерывна при переходе через границу раздела двух сред.

Воспользуемся VI уравнением Максвелла: $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$. Составим условие для проекции вектора $\vec{B}$ на касательную $\vec{t}$ на границе раздела двух сред. Получим:

$$\frac{B_{2t}}{m_2 m_0} - \frac{B_{1t}}{m_1 m_0} = i.$$

Тангенциальная компонента вектора $\overset{\mathbf{r}}{B}$ при $i \neq 0$ всегда испытывает скачок даже при $m_1 = m_2$. Но, если $i=0$ и $m_1 = m_2$, то

$$B_{1t} = B_{2t},$$

что говорит о непрерывности тангенциальной компоненты вектора $\overset{\mathbf{r}}{B}$ в данном случае.