ГЛАВА1. *Полная система уравнений Максвелла*

§1. Закон сохранения электрического заряда

В 1834 г. Фарадей сформулировал закон сохранения электрического заряда (ЗСЭЗ). В современной формулировке закон читается следующим образом: **алгебраическая сумма зарядов всех частиц и античастиц в замкнутой системе есть величина постоянная.**

Для математической записи этого закона введём следующие физические величины:

1) **сила электрического тока I** – это физическая величина, численно равная количеству электричества, которое проходит через сечение проводника за единицу времени. Измеряется I согласно определению:

$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{Кл}{с} = A$ (ампер)

2) если разделить величину тока I на сечение проводника, то получается физическая величина, называемая **плотностью тока**:

$$j = \frac{I}{S}; \quad [j] = \frac{A}{м^2}$$

3) физическая величина, которая численно равна количеству электричества, заключённого в единице объёма, называется **объёмной плотностью заряда**: $\rho = \frac{Q}{V}$; $[\rho] = \frac{Кл}{м^3}$

ЗСЭЗ в интегральной форме записывается так:

$$I = -\frac{dQ}{dt}.$$

Это равенство записано с учётом следующего правила. Будем считать направление электрического тока за положительное, если движение заряда происходит из некоторого объёма наружу. Если заряды движутся в противоположную сторону, то такое направление будем считать отрицательным.

Электрическим током называется любое направленное движение электрических зарядов. Если через любое поперечное сечение за один и тот же промежуток времени протекает одно и то же количество

электричества, то такой электрический ток называется постоянным. Если это условие не выполняется, то ток называется переменным. Чтобы возник электрический ток, из некоторого объёма должны вытекать электрические заряды. Следовательно, внутри объёма, где находились эти заряды, их количество станет меньше. Тогда, если слева стоит положительный ток, то справа величина $\frac{dQ}{dt} < 0$. Но приравнивать можно только величины одного знака (одного наименования и направления). Именно поэтому справа поставлен знак “минус”.

Весь курс электродинамики мы построим, предположив, что контуры, поверхности и объёмы в наших задачах не будут изменяться. Тогда все производные будут по сути дела частными производными. Следовательно, предыдущую формулу можно записать так:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Выразим количество электричества, заключённое в некотором объёме, так:

$$Q = \int r dV. \qquad (1)$$

Запишем ток следующим образом: $I = \oint \vec{j} d\vec{S}$. (2)

Плотность тока определяет направление движения зарядов. Не обязательно, чтобы заряды перемещались перпендикулярно площадке. Следовательно, нам нужно взять ту часть движущихся зарядов, которые движутся перпендикулярно площадке, что находится в соответствии с определением силы тока. Поэтому эта часть электрического тока, которая перемещается перпендикулярно площадке, будет выражаться скалярным произведением

$$\vec{j} d\vec{S} = j dS \cos\alpha = j_n dS,$$

где α – угол между векторами $\vec{j}$ и $d\vec{S}$, индекс n говорит о проекции плотности тока на направление нормали к площадке.

Объединим (1) и (2) с формулой ЗСЭЗ:

$$\oint j_n dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV .$$

Применим к левой стороне этого равенства теорему Гаусса, которая связывает поверхностный интеграл с объёмным:

$$\oint j_n dS = \int div\vec{j} dV$$ - теорема Гаусса.

$$\int div\vec{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV$$

Поменяем справа порядок дифференцирования и интегрирования согласно деланной выше оговорке и перенесём правый член налево:

$$\int\left(div\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} r\right)dV = 0 .$$

Интеграл равен нулю при отличном от нуля объёме интегрирования, если подинтегральное выражение равно нулю.

$$div\vec{j} = -\frac{\partial r}{\partial t}$$ - дифференциальная форма записи ЗСЭЗ.

В нашей классификации эти уравнения будут называться VII уравнениями Максвелла:

1) интегральная форма: $I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$;

2) дифференциальная форма записи ЗСЭЗ: $div\vec{j} = -\frac{\partial r}{\partial t}$.

Обе формы записи выражают одну и ту же физическую суть – ЗСЭЗ. Интегральная форма читается так: изменение во времени количества электричества в некотором объёме сопровождается возникновением электрического тока. Дифференциальная запись (имеет тот же смысл, что и интегральная) читается так: при изменении во времени объёмной плотности количества электричества в окрестности некоторой точки возникает движение зарядов, т. е. электрический ток.

§2. Теорема Гаусса
(IV уравнение Максвелла)

Во времена Фарадея эфир подразумевался существующим и наличие электрических или магнитных полей выражалось в деформации эфира. В эфире возникали напряжения, которые графически изображались силовыми линиями. Тогда понятно выражение “проводник пересекает магнитные силовые линии”. Когда в 1905 г. Эйнштейн отказался от эфира, как от носителя электромагнитных колебаний, то силовые линии потеряли свой физический смысл как реальности и сохранились лишь для графического изображения электромагнитного поля, поэтому предыдущая фраза сегодня физически бессмысленна.

В соответствии с выше сказанным введём понятие **потока линий вектора электрической индукции.** По определению

$$N = \oint D_n dS \ .$$

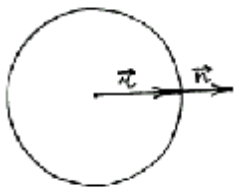
Помимо вектора электрической индукции для описания свойств электрического поля вводится ещё одна физическая характеристика – **напряжённость электрического поля.** Между вектором электрической индукции и вектором напряжённости электрического поля экспериментально установлена следующая связь:

$$\vec{D} = ee_0 \vec{E} \ .$$

В проекции на нормаль

$$D_n = ee_0 E_n \ .$$

В качестве поверхности интегрирования возьмём сферу, вблизи центра которой расположены электрические заряды. Радиус сферы можно взять таким, что область, занимаемая зарядами, будет считаться бесконечно малой. Тогда будем считать, что заряды находятся в центре этой сферы. Индекс n - это индекс нормали к поверхности, которая направлена из объёма наружу.



Очевидно, что радиус-вектор $\vec{r}$ и нормаль $\vec{n}$ совпадают по направлению; тогда можно перейти от индекса n к индексу r:

$$N = \oint D_r dS$$

Воспользуемся формулой закона Кулона:

$$F = \frac{qQ}{4pee_0 r^2} \text{ или } \vec{F} = \frac{qQ}{4pee_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0$ - единичный орт. Разделим обе части формулы на q, где q – заряд, расположенный в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. Получим:

$$\frac{F}{q} = \frac{Q}{4pee_0 r^2} = E.$$

Эта величина называется напряжённостью поля и характеризует поле в данной точке, где находится заряд q. $E = E_r$, т. е. напряжённость направлена по радиус-вектору. Q – заряд, в поле которого находится заряд q, ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума. ε – относительная диэлектрическая постоянная.

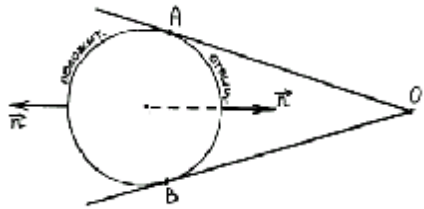
Итак:

$$N = \oint ee_0 E_r dS = \oint ee_0 \frac{Q}{4pee_0 r^2} dS = \frac{Q}{4p}\oint \frac{dS}{r^2}.$$

Знак $\oint$ означает, что поверхность интегрирования замкнутая.

Известно, что $$\oint \frac{dS}{r^2} = \begin{cases} 4p \\ 0 \end{cases}.$$

Первый случай получается, если точка наблюдения находится внутри сферы. 4π – это полный телесный угол, под которым видна внутренняя поверхность сферы из её центра. Телесный угол считается положительным, если направление взгляда на объект совпадает с нормалью к поверхности этого объекта. Телесный угол считается отрицательным, если нормаль к поверхности объекта направлена навстречу “взгляду”.



Из рисунка видно, что часть сферы видна под положительным телесным углом, а другая часть – под тем же, но отрицательным углом (по нашей договорённости).

Имеем два случая для определения потока вектора электрической индукции:

$$N = \oint \mathbf{r}\,\mathbf{r}\,DdS = \begin{cases} Q \\ 0 \end{cases}.$$

Полученный результат можно формулировать так: если внутри рассматриваемого объёма расположены электрические заряды, то полный поток вектора электрической индукции численно равен величине заряда Q, находящегося внутри объёма. Можно сделать ещё один вывод: линии вектора электрической индукции начинаются на одних и заканчиваются на других зарядах. Условно принято считать, что линии начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных; число линий совпадает с числом зарядов. Второй результат можно истолковать так: если внутри объёма нет электрических зарядов, то, сколько линий войдёт в объём через поверхность, столько же и выйдет.

§3. Полный ток (ток проводимости и ток смещения)

Любое направленное движение реальных электрических зарядов называется электрическим током. Этот ток часто называют током проводимости (поток электронов, позитронов, положительных и отрицательных заряженных ионов и т. д.). Рассматривая роль среды, Фарадей установил её огромную роль в электрических и магнитных явлениях. Для описания этого влияния среды он и ввёл вектор электрической индукции; первоначально он назывался вектором смещения. Когда Максвелл придал идеям Фарадея математическую запись, он ввёл понятие тока смещения. Вместе с током проводимости ток смещения образует полный ток в цепи.

Рассмотрим такой пример: в цепи постоянного тока конденсатор образует разрыв. Однако, если по цепи идёт переменный ток, то между пластинами существует тот самый ток смещения.

Получим выражение для полного тока. Для этого воспользуемся VII уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Распишем обе части: $I = \oint j_n dS$, а с другой стороны для величины Q воспользуемся доказанной выше теоремой Гаусса: $Q = \oint D_n dS$.

Составим интегральную форму записи исходного уравнения:

$$\oint j_n dS = -\frac{\partial}{\partial t}\oint D_n dS .$$

Согласно договорённости о неизменности контуров, справа можно поменять порядок дифференцирования и интегрирования:

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\oint \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} d\vec{S} .$$

Перенесём член справа налево и составим один интеграл:

$$\oint \left\{ \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} d\vec{S} = 0 .$$

Этот интеграл всегда будет равен нулю только в случае, если выражение, стоящее в фигурных скобах, равно нулю. Получаем

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Эту плотность тока и называют плотностью тока смещения. Таким образом, суммарный ток будет слагаться из тока проводимости и тока смещения:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{см} .$$

§4. Опыт Эрстеда (I уравнение Максвелла)

В 1820 г. датский физик Эрстед, демонстрируя электрический ток, обнаружил, что вокруг проводника с током существует магнитное поле.

Обнаружил это он с помощью индикаторов – магнитных стрелок. Максвелл придал этому результату математическую запись. Экспериментально было установлено (с помощью железных опилок или набора магнитных стрелок), что магнитные линии – замкнутые линии, т. е. можно говорить о том, что магнитное поле имеет вихревой характер. Математически это записывается с помощью оператора rot (“ротор”). Характеристикой магнитного поля выступает напряжённость магнитного поля, поэтому говорят о “вихрях” напряжённости магнитного поля. Они существуют не только вокруг тока проводимости, но и вокруг тока смещения. Тогда можно написать уравнение:

$$rot\vec{H} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{см} .$$

Получили дифференциальную форму записи I уравнения Максвелла. Оно утверждает, что вокруг любого тока существуют вихри магнитного поля. Иногда говорят, что электрический ток порождает магнитное поле, что не совсем корректно для постоянных токов, т. к. не существует в данной системе отсчёта тока без его магнитного поля. Нельзя говорить, что постоянный ток порождает постоянное магнитное поле, они сосуществуют, здесь нет причинно-следственной связи. Иначе обстоит дело в случае переменных полей: любое изменение внешних полей сопровождается сопутствующими явлениями. Например, антенна телевизионной станции является источником электромагнитных волн, т. к. в ней циркулируют переменные токи.

Получим интегральную форму записи I уравнения Максвелла, для чего предыдущее равенство умножим скалярно на элемент поверхности $d\vec{S}$ и проинтегрируем по поверхности площадки: $\int rot\vec{H}d\vec{S} = \int \vec{j}_{пр}d\vec{S} + \int \vec{j}_{см}d\vec{S}$.

Применим к левой стороне равенства теорему Стокса. Она связывает поверхностный интеграл с контурным интегралом.

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I_{пр} + I_{см} .$$

Получили интегральную форму записи I уравнения Максвелла. Оно имеет тот же физический смысл, что и дифференциальная форма, только речь идёт о конечном контуре и площадке, в то время как дифференциальная форма записи относится к бесконечно малой окрестности некоторой точки. Вокруг тока проводимости и тока смещения существуют вихри магнитного поля – это утверждает интегральная форма I уравнения Максвелла.

§5. Опыт Фарадея
(II уравнение Максвелла)

В 1831 г. Фарадей установил явление электромагнитной индукции (ЭМИ): если меняется магнитный поток $\frac{\partial f}{\partial t}$, где f - магнитный поток, $f = \int B_n dS$, где $\vec{B}$ - новая характеристика магнитного поля – вектор магнитной индукции, то при любом изменении магнитного потока со временем в замкнутом проводнике возникает электрический ток. Максвелл обобщил формулировку, заменив проводник замкнутым контуром. Важным является то, что изменение магнитного потока происходит через площадку, охваченную замкнутым проводником или произвольным контуром. Если проводник разомкнут, то на концах разомкнутой цепи возникает разность потенциалов.

В проводнике возникает электрический ток потому, что в нём образуются вдоль его оси вихри электрического поля, приводящие в движение свободные заряды. Поэтому математически предыдущее выражение можно записать так: вихри вектора $\vec{E}$ порождаются изменением во времени вектора магнитной индукции:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Помножим обе стороны скалярно на $d\vec{S}$ и проинтегрируем по всей площади, охваченной проводником:

$$\int rot\vec{E}d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Применим к левой стороне равенства теорему Стокса:

$$\int rot\vec{E}d\vec{S} = \oint \vec{E}d\vec{l} = \oint E_l dl = e^{инд}$$

Рассмотрим смысл подынтегрального выражения $\vec{E}d\vec{l}$. Известно, что $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, тогда скалярное произведение $\vec{E}d\vec{l}$ численно равно элементарной работе, которую совершают электрические силы по перемещению единичного положительного заряда на пути dl. Взятие

интеграла по всему замкнутому пути определяет полную работу электрических сил на этом пути. В курсе электричества эту величину называют ЭДС источника тока.

Таким образом, II уравнение Максвелла выражает закон ЭМИ:

$$e^{инд} = -\frac{\partial}{\partial t}\int B_n dS .$$

II уравнение Максвелла утверждает, что при любом изменении потока вектора магнитной индукции через площадку, охваченную замкнутым контуром, в нём возникает ЭДС индукции. Знак “минус” выражает математически закон сохранения и превращения энергии (ЗСПЭ) и часто называется правилом Ленца. Читается физическое содержание знака “минус” так: магнитное поле индукционного тока, возбуждаемого в замкнутом контуре, направлено так, что своим магнитным полем препятствует той причине, которой возбуждается индукционный ток (препятствовать – это не значит быть направленным противоположно. Например, если внешний магнитный поток уменьшается, то магнитное поле индукционного тока, препятствуя этому уменьшению, направлено в ту же сторону, что и внешнее магнитное поле.).

§6. III уравнение Максвелла

Воспользуемся II уравнением Максвелла в дифференциальной форме:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Возьмём от обеих частей этого равенства операцию дивергенции:

$$divrot\vec{E} = -div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Рассмотрим смешанное скалярно-векторное произведение, обладающее свойством циклической перестановки: $\left(\nabla\left[\nabla\vec{E}\right]\right) = \left(\left[\nabla\nabla\right]\vec{E}\right)$.

Воспользуемся свойством циклической перестановки членов смешанного произведения, но нужно всегда помнить, что функция должна стоять после оператора. Учитывая значение векторного произведения $\left[\nabla\nabla\right] = 0$, получаем, что $\left(\left[\nabla\nabla\right]\vec{E}\right) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} div\vec{B} = 0 .$$

или:

$$div\vec{B} = const \cdot$$

Пусть const = 0, т. к. когда-то магнитного поля не было. Тогда

$$div\vec{B} = 0 \cdot$$

Это равенство утверждает, что внутри окрестности некоторой точки не происходит разрыва линий вектора магнитной индукции, они не начинаются и не заканчиваются в этой окрестности (подобно линиям вектора $\vec{D}$, которые начинаются на одних зарядах, а заканчиваются на других). Другими словами, у линий вектора магнитной индукции нет ни начала, ни конца. Следовательно, они замкнуты. Именно поэтому ранее говорили о вихрях вектора $\vec{H}$ в I уравнении Максвелла.

Получим интегральную форму записи предыдущего уравнения. Для этого помножим дифференциальную форму на элемент объёма dV и проинтегрируем по всему объёму:

$$\int div\vec{B}dV = 0$$

Применим теорему Гаусса: $\oint B_n dS = 0$ или $\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$.

Интегральная форма III уравнения Максвелла имеет тот же смысл, что и дифференциальная, но относится к конечному объёму: сколько линий вектора магнитной индукции заходит в объём, столько же и выходит. Линии вектора магнитной индукции нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Они замкнуты.

§7. IV уравнение Максвелла (повторный вывод)

Воспользуемся I уравнением Максвелла: $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Возьмём операцию дивергенции:

$$divrot\vec{H} = div\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} div\vec{D}.$$

Левая часть этого выражения равна нулю, следовательно,

$$0 = div\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} div\vec{D}.$$

Воспользуемся формулой ЗСЭЗ (VII уравнением Максвелла в дифференциальной форме):

$$div\vec{j} = -\frac{\partial r}{\partial t}$$

и подставим в предыдущее выражение:

$$-\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} div\vec{D} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(div\vec{D} - r\right) = 0.$$

Как и в §6, величину, стоящую в круглых скобках, приравняем к нулю и получим:

$$div\vec{D} = r.$$

В § 2 мы получили интегральную форму записи этого уравнения.

§8. V, VI и VIII уравнения Максвелла

Рассмотрим однородную и изотропную среду. Экспериментально было установлено, что в таких средах между парами векторов для электрических и магнитных полей имеется линейная связь.

V уравнение Максвелла утверждает связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Эти величины пропорциональны, но они разные, т. к. их наименования различны.

VI уравнение Максвелла: $\vec{B} = mm_0 \vec{H}$.

Оба эти уравнения Максвелла справедливы и в любой точке, и в любом объёме.

VIII уравнение Максвелла является обобщением опыта и называется законом Ома (1827 г.):

$$I = \frac{e}{R + r},$$

где R – сопротивление внешней части цепи, а r – сопротивление

источника. В дифференциальной форме VIII уравнение Максвелла записывается так:

$$\vec{j} = s\left(\vec{E} + \vec{E}^{стр}\right).$$

Т. е. плотность тока пропорциональна полю электрических и сторонних сил. $\vec{E}$ – напряжённость поля электрических сил (зарядов), $\vec{E}^{стр}$ – напряжённость поля, обусловленная химическими, термическими процессами и т. д.

По определению

$$s = \frac{1}{r},$$

где r - удельное сопротивление, а s - удельная проводимость.

§9. Полная система уравнений Максвелла

Составим полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах:

I уравнение: $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; $\oint \vec{H}d\vec{l} = I + \frac{\partial N}{\partial t}$, где $N = \int \vec{D}d\vec{S}$.

II уравнение: $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} f$, где $f = \int B_n dS$.

III уравнение: $div\vec{B} = 0$; $\oint B_n dS = 0$.

IV уравнение: $div\vec{D} = r$; $\oint \vec{D}d\vec{S} = Q$.

V уравнение: $\vec{D} = ee_0\vec{E}$.

VI уравнение: $\vec{B} = mm_0\vec{H}$.

VII уравнение: $div\vec{j} = -\frac{\partial r}{\partial t}$; $I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$.

VIII уравнение: $\vec{j} = s\left(\vec{E} + \vec{E}^{стр}\right)$; $I = \frac{e}{R + r}$.